

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ТЮМЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЕГАЗОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Л. Б. Половникова

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ ПО КУРСУ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано УМО РАЕ

*по классическому университетскому и техническому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки:*

*13.03.02 – «Электроэнергетика и электротехника»,
18.03.02– «Химическая технология», 23.03.03 – «Эксплуатация транспортно-
технологических машин и комплексов» (Профиль подготовки:
«Сервис транспортных и транспортно-технологических машин
и оборудования (в нефтегазодобыче)»*

Тюмень
ТюмГНГУ
2015

УДК 53. 02 (075)

ББК 74.58

П 52

Рецензенты:

профессор, доктор педагогических наук М.Д. Даммер

доцент, кандидат педагогических наук Л.В. Пилипец

Половникова, Л. Б.

П 52 Задачи и примеры решений по курсу физики [Текст]: учебное пособие / Л. Б. Половникова. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2015 - 231 с.

ISBN 978-5-9961-1147-3

В учебном пособии представлены задачи по курсу физики с подробными примерами решений, индивидуальными заданиями для самоподготовки. Каждая тема содержит основные законы и формулы, позволяющие быстро восстановить в памяти необходимые сведения для выполнения заданий.

Основное назначение – показать студентам на конкретных примерах методы решения физических задач, помочь в подготовке к процедурам контроля: промежуточным и итоговым аттестациям, сдаче экзаменов и зачетов.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника; 18.03.02 – Химическая технология; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, может быть использовано для самообразования также студентами младших курсов других направлений подготовки технического профиля, изучающих физику, абитуриентами при подготовке в вуз, учащимся старших классов средней школы.

УДК 53.02 (075)

ББК 74.58

ISBN 978-5-9961-1147-3

© Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тюменский государственный
нефтегазовый университет», 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
ГЛАВА 1. МЕХАНИКА.....	6
1.1. Кинематика и динамика поступательного и вращательного движений	6
1.1.1. Кинематика поступательного и вращательного движений....	6
1.1.2. Динамика поступательного и вращательного движений.....	15
1.2. Законы сохранения. Элементы СТО.....	26
1.2.1. Механическая работа, энергия, мощность. Закон сохранения энергии. Импульс. Закон сохранения импульса. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса.....	26
1.2.2. Элементы специальной теории относительности.....	42
ГЛАВА 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА.....	50
2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа.....	50
2.2. Основы термодинамики.....	60
ГЛАВА 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ.....	76
3.1. Электростатика.....	76
3.1.1. Закон Кулона. Методы расчета электростатических полей...	76
3.1.2. Работа сил электростатического поля. Емкость проводников и конденсаторов. Энергия электростатического поля.....	88
3.2. Постоянный ток.....	101
3.2.1. Законы постоянного тока.....	101
3.2.2. Работа и мощность тока.....	110
3.3. Электромагнетизм.....	119
3.3.1. Магнитное поле постоянных токов.....	119
3.3.2. Действие магнитного поля на ток. Движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях.....	130
3.3.3. Электромагнитная индукция.....	139
ГЛАВА 4. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА.....	151
4.1. Интерференция и дифракция света.....	151
4.2. Взаимодействие света с веществом. Поляризация света. Формулы Френеля. Дисперсия, поглощение и рассеяние света.....	166
ГЛАВА 5. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ.....	180
5.1. Энергия, импульс и масса фотона. Давление света.....	181
5.2. Тормозное рентгеновское излучение. Эффект Комптона. Тепловое излучение.....	190
ГЛАВА 6. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА. АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА.....	199
6.1. Теория Бора. Волновые свойства частиц	
Принцип неопределенности.....	199
6.2. Элементы квантовой механики.....	207
6.3. Физика атомного ядра.....	220
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	228
Библиографический список использованной и рекомендованной для подготовки литературы.....	229

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика занимает особое место при подготовке инженера. Решение задач составляет неотъемлемую часть полноценного изучения физики. По характеру работы инженеру чаще всего приходится решать различные производственные задачи: технологические, конструкторские, исследовательские. Именно поэтому мы придаем большое значение выработке приемов и навыков решения физических задач.

Цель книги – показать студентам на конкретных примерах из курса общей физики методы решения физических задач, помочь в подготовке к процедурам контроля: промежуточным и итоговым аттестациям, сдаче экзаменов и зачетов.

Научиться решать задачи можно только решая их. Список литературы, посвященный методике решения задач, достаточно обширен (напр., см. библиографию). Для того чтобы успешно решать задачи, знание теории необходимо, но недостаточно. Необходимо овладеть еще так называемыми обобщенными методами решения задач.

Следует заметить, что любая частная физическая задача представляет собой дедуктивно выстроенную последовательность рассуждений от фундаментального ядра физической теории к теоретическому следствию. В обычных текстовых задачах, содержательно отражается гипотетико-дедуктивная модель организации знания физической теории. При решении задач формируются знания об обобщенных приемах умственных действий на каждом этапе решения задачи, и иллюстрируется предсказательная функция физической теории.

При внимательном рассмотрении решений разного рода задач по различным дисциплинам можно отчетливо видеть, что различие их между собой состоит только в содержании и цели, а по структуре деятельности, нужной для решения, все они практически одинаковы. Более того, сравнительный анализ деятельности по решению инженерно-технических и учебных задач показывает, что и они имеют общую структуру, иначе говоря, при решении любой задачи необходимо выполнять три принципиально важных этапа.

1. Физический этап – этап осмысления проблемы, изложенной в задаче, и составление замкнутой системы уравнений с учетом связей и отношений в физической системе и используемых идеализации.

2. Математический этап – этап решения системы уравнений и расчет численного значения искомой величины.

3. Этап формирования результата решения задачи – этап анализа проведенного решения, отбор информации, полезной для дальнейшей работы. Существование такой общности позволит студентам в процессе ре-

шения учебных задач освоить общие методы в решении всех задач, ознакомиться с основными особенностями каждого из этих этапов процесса решения и овладеть в результате познавательными действиями, необходимыми для решения производственных задач.

Все приведенные в пособии задачи использовались на практических занятиях по физике со студентами, обучающихся по направлениям подготовки технического профиля. Многие из задач предлагались на олимпиадах для школьников.

Предлагаемое пособие, является логическим продолжением издания автора «Практикум по решению физических задач» [10]. В нем обобщены сведения о физических задачах и методах их решения с примерами из раздела «Механика» курса физики.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки: 13.03.02 – Электроэнергетика и электротехника; 18.03.02 – Химическая технология; 23.03.03 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов, может быть использовано для самообразования также студентами младших курсов других направлений подготовки технического профиля, изучающих физику, абитуриентами при подготовке в вуз, учащимся старших классов средней школы, преподавателями.

Автор

ГЛАВА 1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика и динамика поступательного и вращательного движений

1.1.1. Кинематика поступательного и вращательного движений

Основные формулы

1. Средней скоростью неравномерного движения называется отношение вектора перемещения $\Delta \vec{r}$ тела ко времени Δt , за которое это перемещение совершено,

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Модуль средней скорости связан с длиной пути ΔS , пройденного точкой,

$$|\langle \vec{v} \rangle| = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

2. Мгновенная скорость

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad v = |\vec{v}| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt}.$$

3. Среднее ускорение

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

4. Мгновенное ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

5. Мгновенное ускорение можно разложить на две составляющие: тангенциальную составляющую (касательное ускорение) $\vec{a}_\tau$ и нормальную составляющую (центростремительное ускорение) $\vec{a}_n$ (рис. 1.1).

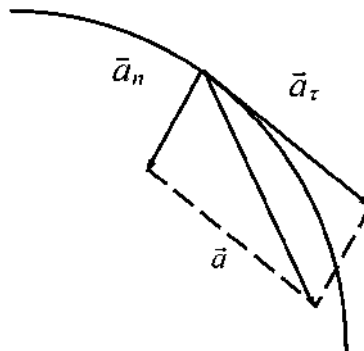


Рис. 1.1

$\vec{a}_\tau$ характеризует изменение скорости по модулю, направлено по касательной к траектории и численно равно:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению, направлено к центру кривизны траектории и по модулю равно:

$$a_n = \frac{v^2}{R},$$

где R - радиус кривизны траектории.

Полное ускорение равно:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

6. Для равномерного прямолинейного движения вдоль оси OX закон движения имеет вид

$$x = \pm x_0 \pm v_x \cdot t,$$

где x_0 - координата в начальный момент времени, v_x - проекция вектора скорости тела на ось OX , t - время движения (знаки в правой части зависят от выбора направления оси OX).

7. Равнопеременное прямолинейное (равноускоренное или равнозамедленное) движение описывается следующими уравнениями:

$$x = \pm x_0 \pm v_{0x} \cdot t \pm \frac{a_x t^2}{2}, \quad v = \pm v_{0x} \pm a_x t,$$

где v_{0x} - скорость тела в начальный момент времени,

a_x - ускорение движения.

Знак "-" (минус) зависит от выбора направления оси OX и направления векторов $\vec{v}$ и $\vec{a}$.

8. Средняя угловая скорость

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t},$$

где $\Delta \vec{\varphi}$ - вектор углового перемещения.

Мгновенная угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

9. Среднее угловое ускорение

$$\langle \vec{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}.$$

Мгновенное угловое ускорение

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2 \vec{\varphi}}{dt^2}.$$

10. Зная $\omega = \omega(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$, можно найти

$$\varphi = \int_{t_1}^{t_2} \omega(t) \cdot dt \quad \text{и} \quad \omega = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t) \cdot dt.$$

11. Связь между линейными и угловыми величинами выражается формулами:

$$S = \varphi \cdot R,$$

где φ - угол поворота, R - модуль радиус-вектора,

$$v = \omega R,$$

$$a_{\tau} = \varepsilon R,$$

$$a_n = \omega^2 R.$$

12. При равномерном движении тела по окружности ($\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$), уравнение его движения имеет вид

$$\varphi = \omega \cdot t.$$

13. Уравнения равнопеременного движения тела по окружности (равноускоренного или равнозамедленного) имеют вид

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \quad \omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t,$$

где ω_0 - начальная угловая скорость, ε - угловое ускорение, знак плюс - для равноускоренного вращения, знак минус - для равнозамедленного вращения.

14. Частота вращения ν при равномерном движении тела по окружности

$$\nu = \frac{N}{t} \quad \text{или} \quad \nu = \frac{1}{T},$$

где N - число оборотов, совершаемых за время t ; T - период вращения (время одного оборота).

15. Величины ω , ν и T связаны между собой соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Поезд движется прямолинейно со скоростью $v_0 = 180$ км/ч. Внезапно на пути возникает препятствие и машинист включает тормоз. С этого момента скорость поезда изменяется по закону $v(t) = v_0 - At^2$, где $A = 1$ м/с³. Каков тормозной путь поезда? Через какое время после начала торможения он остановится?

Решение

Для нахождения закона движения поезда запишем дифференциальное уравнение $v(t) = \frac{dx}{dt}$, $dx = v(t)dt$ или

$$dx = (v_0 - At^2) dt.$$

После интегрирования уравнения (1) и учета начальных условий получаем закон движения:

$$x = v_0 t - \frac{At^3}{3}. \quad (1)$$

Время торможения поезда определяется из условия равенства нулю его скорости:

$$v_0 - At^2 = 0, \quad t = \sqrt{v_0/A}. \quad (2)$$

Подстановка числовых значений даёт $t = 7$ с. Из уравнения (1) находим тормозной путь: $x = 230$ м.

Задача 2. Материальная точка движется по закону $\vec{r}(t) = A \sin(5t) \vec{i} + B \cos^2(5t) \vec{j}$, где $A = 2$ м, $B = 3$ м. Определить вектор скорости, вектор ускорения и траекторию движения материальной точки.

Решение

Рассматриваемая задача называется обратной задачей кинематики, она заключается в нахождении любого параметра движения по известному закону движения (задача 1 являлась прямой основной задачей кинематики, она состоит в том, чтобы определить закон движения по какому-либо известному параметру движения, вектору $\vec{v}$ или $\vec{a}$). Итак, находим проекции радиус-вектора:

$$x(t) = A \sin(5t), \quad y(t) = B \cos^2(5t), \quad z(t) = 0. \quad (3)$$

Так как $z(t) = 0$, движение материальной точки происходит в плоскости XOY. Определим проекции вектора скорости:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 5A \cos(5t), \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -5B \sin(10t), \quad v_z(t) = 0. \quad (4)$$

Из уравнений (4) находим проекции вектора ускорения:

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -25A \sin(5t), \quad a_y(t) = \frac{dv_y}{dt} = -50B \cos(10t). \quad (5)$$

Зная проекции векторов скорости и ускорения, можно определить эти вектора, умножив проекции на орты соответствующих осей и сложив их:

$$\vec{v}(t) = 5A \cos(5t) \vec{i} - 5B \sin(10t) \vec{j}, \\ \vec{a}(t) = -25A \sin(5t) \vec{i} - 50B \cos(10t) \vec{j}.$$

Для получения уравнения траектории исключим время t из системы уравнений (3):

$$y = 3 - \frac{3}{4} x^2. \quad (6)$$

Уравнение (6) описывает движение материальной точки по параболе.

Задача 3. По графику перемещения, состоящему из двух участков парабол, построить графики скорости и ускорения.

Решение

На участке Ot_1 движение равнозамедленное и направлено в сторону, противоположную оси X (участок OA , рис. 1.3), поэтому скорость отрицательная и убывает по модулю ($b-c$), а ускорение положительно (b_1-c_1). На участке $t_1 - t_2$ движение равноускоренное по оси OX (участок AO , рис. 1.1.3), поэтому скорость положительна и возрастает по модулю ($c-d$), а ускорение остаётся прежним по модулю и направлению ($c_1d'_1$). На участке $t_2 - t_3$ движение равнозамедленное в прежнем направлении; скорость положительна и убывает по модулю ($d-e$), а ускорение отрицательное ($d_1''e_1$). На участках $t_3 - t_4$ движение равноускоренное и направлено в сторону, противоположную оси OX , поэтому скорость отрицательная и возрастает по модулю, а ускорение остается прежним.

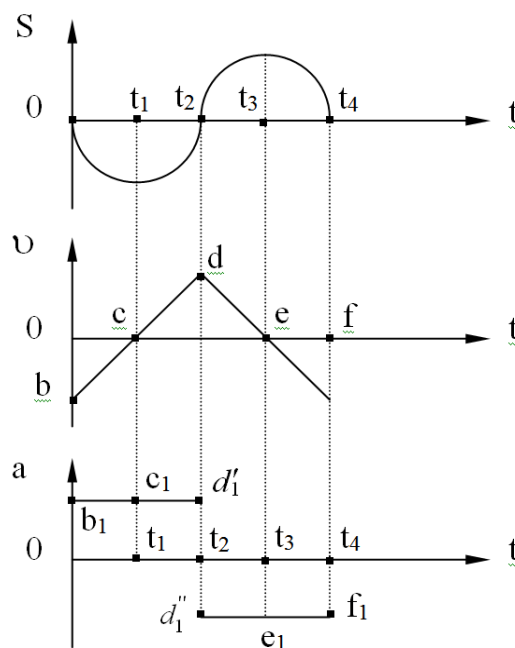


Рис. 1.2

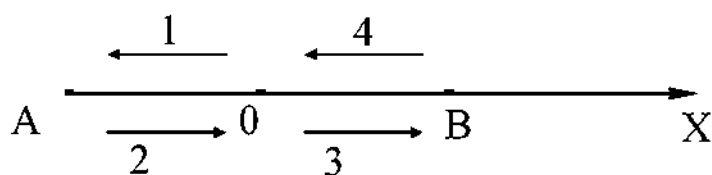


Рис.1.3

Задача 4. Колесо радиусом $R = 0,1$ м вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением $\varphi = A + Bt + ct^3$, где $B = 2$ рад/с, $C = 1$ рад/с³. Для точек, лежащих на ободе колеса, найти через 2 с после начала движения следующие величины: 1) ε - угловое ускорение, 2) линейную скорость, 3) угловую скорость ω , 4) тангенциальное и нормальное ускорения.

Решение

Угловая скорость есть первая производная от функции $\varphi(t)$:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 3ct^2, \quad \omega = 14 \text{ рад/с.}$$

Учитывая взаимосвязь линейных и угловых характеристик вращательного движения, запишем

$$v = \omega \cdot R = 1,4 \text{ м/с.}$$

Дифференцируя $\omega(t)$ по t , определим

$$\varepsilon = \frac{d\omega(t)}{dt} = 6ct = 12 \text{ рад/с.}$$

Тангенциальное и нормальное ускорение находим простой подстановкой данных в формулы:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R = 1,2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_n = \omega \cdot R = 19,6 \text{ м/с}^2.$$

Задачи, рекомендуемые для решения на аудиторных занятиях

Задача 1. Скорость материальной точки изменяется по закону

$$\vec{v}(t) = A(2t^3 - B)\vec{i} - D \sin\left(\frac{2\pi}{3}t\right)\vec{j},$$

где $A = 1 \text{ м/с}^4$, $B = 1 \text{ с}^3$, $D = 1 \text{ м/с}$. Определить закон движения, если в начальный момент времени $t = 0$ тело находилось в начале координат.

Ответ: $\vec{r}(t) = A\left(\frac{1}{2}t - Bt\right)\vec{i} + \frac{3D}{2\pi}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}t - 1\right)\right]\vec{j}.$

Задача 2. Автомобиль движется по закругленному шоссе, имеющему радиус кривизны $R = 50 \text{ м}$. Уравнение движения автомобиля $S(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10 \text{ м}$, $B = 10 \text{ м/с}$, $C = -0,5 \text{ м/с}^2$. Найти скорость автомобиля, его тангенциальное, нормальное и полное ускорения в момент времени $t = 5 \text{ с}$.

Ответ: $v = 5 \text{ м/с}$; $a_\tau = -1 \text{ м/с}^2$; $a_n = 0,5 \text{ м/с}^2$; $a = 1,12 \text{ м/с}^2$.

Задача 3. По графику скорости (рис.1. 4) построить график перемещения и ускорения и объяснить характер движения точки на различных участках.

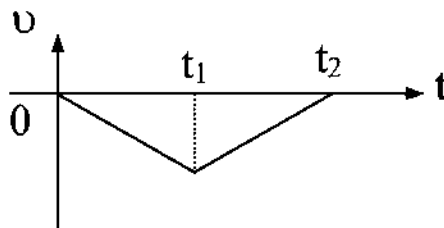


Рис. 1.4

Задача 4. Тело брошено со скоростью

$v = 20,0$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти скорость тела, а также его нормальное и тангенциальное ускорения через $t = 1,5$ с после начала движения. На какое расстояние l переместится за это время тело по горизонтали и на какой окажется высоте h ?

Ответ: $v = 17$ м/с; $a_\tau = 2,6$ м/с²; $a_n = 9,5$ м/с²; $l = 26$ м; $h = 4$ м.

Задача 5. Линейная скорость точек на ободе вращающегося диска $v_1 = 3$ м/с. Точки, расположенные на $0,1$ м ближе к оси, имеют линейную скорость $v_2 = 2$ м/с. Сколько оборотов в секунду делает диск?

Ответ: $\nu = \frac{v_1 - v_2}{2\pi r} = 1,59$ об/с, где $r = 0,1$ м.

Задача 6. Колесо вращается так, что зависимость угла поворота радиуса колеса от времени дается уравнением

$$\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3.$$

Здесь $B = 1$ рад/с; $C = 1$ рад/с²; $D = 1$ рад/с³. Найти радиус колеса, если известно, что к концу второй секунды движения нормальное ускорение точек на ободе равно $a_n = 3,46 \cdot 10^2$ м/с².

Ответ: $R = 1,2$ м.

Домашнее задание

1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси X имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м, $B = 1$ м/с, $C = -0,5$ м/с³. Найти координату X , скорость v_x и ускорение a_x точки в момент времени $t = 2$ с.

2. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с². Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $R = 0,1$ м от оси вращения, в момент времени $t = 4$ с.

3. Точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Закон её движения задается уравнением $S = A + Bt^2$, где $A = 8$ м, $B = -2$ м/с².

Определить момент времени t , когда нормальное ускорение a_n точки равно 9 м/с². Найти скорость v , тангенциальное a_τ и полное a ускорения точки в тот же момент времени.

4. Две материальные точки движутся согласно уравнениям

$$x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3, \quad x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3,$$

где $A_1 = 4$ м/с, $B_1 = 8$ м/с², $C_1 = -16$ м/с³, $A_2 = 2$ м/с, $B_2 = -4$ м/с², $C_2 = 1$ м/с³. В какой момент времени t ускорения этих точек будут одинаковы? Найти скорости v_1 и v_2 точек в этот момент.

5. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 4$ м/с. Когда оно достигло верхней точки полета из того же начального пункта, с той же начальной скоростью v_0 вертикально вверх брошено второе тело. На каком расстоянии h от начального пункта встретятся тела? Соппротивление воздуха не учитывать.

6. Материальная точка движется прямолинейно с ускорением $a = 5$ м/с². Определить, на сколько путь, пройденный точкой в n -ю секунду, будет больше пути, пройденного в предыдущую секунду. Принять $v_0 = 0$.

7. Две автомашины движутся по дорогам, угол между которыми $\alpha = 60^\circ$. Скорость автомашин $v_1 = 54$ км/ч и $v_2 = 72$ км/ч. С какой скоростью v удаляются машины одна от другой?

8. Материальная точка движется прямолинейно с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с и постоянным ускорением $a = -5$ м/с². Определить, во сколько раз путь ΔS , пройденный материальной точкой, будет превышать модуль ее перемещения Δr спустя $t = 6$ с после начала отсчёта времени.

9. Велосипедист ехал из одного пункта в другой. Первую треть пути он проехал со скоростью $v_1 = 18$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 22$ км/ч, после чего до конечного пункта он шел пешком со скоростью $v_3 = 5$ км/ч. Определить среднюю скорость $\langle v \rangle$ велосипедиста.

10. Тело брошено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Каковы будут нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения тела через время $t = 1$ с после начала движения?

11. Точка движется по окружности радиусом $R = 30$ см с постоянным угловым ускорением ε . Определить тангенциальное ускорение a_τ точки, если известно, что за время $t = 4$ с она совершила 3 оборота и в конце третьего оборота её нормальное ускорение $a_n = 2,7$ м/с².

12. По графику скорости построить графики перемещения и ускорения и объяснить характер движения тела на различных участках (рис.1.5).

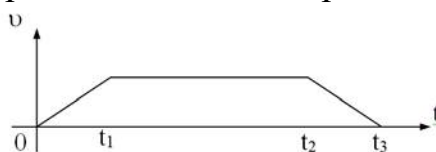


Рис. 1.5

13. По графику перемещения построить графики скорости и ускорения и объяснить характер движения на каждом участке (рис. 1.6).

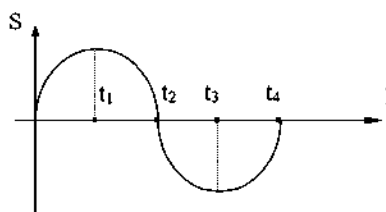


Рис. 1.6

14. Снаряд вылетел из орудия с начальной скоростью 100 м/с под углом 30° к горизонту. Определить дальность полета и время движения снаряда. Орудие и точка падения снаряда находятся на одной горизонтали.

15. С высоты h над поверхностью земли брошено тело под некоторым произвольным углом α к горизонту со скоростью v_0 . С какой скоростью тело упадет на землю?

16. Найти радиус вращающегося колеса, если известно, что линейная скорость точки, лежащей на ободе, в 2,5 раза больше линейной скорости точки, лежащей на 5 см ближе к оси колеса.

17. Вал начинает вращаться и за первые 10с совершает 50 оборотов. Считая вращение вала равноускоренным, определить угловое ускорение и конечную угловую скорость.

18. Колесо при вращении имеет начальную частоту 5 с^{-1} , после торможения, через 1 секунду, его частота уменьшилась до 3 с^{-1} . Найти угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за это время.

19. Зависимость угла поворота радиуса вращающегося колеса от времени дана уравнением $\varphi(t) = 4 + 5t - t^3$. Найти в конце первой секунды вращения угловую скорость колеса, а также линейную скорость и полное ускорение точки, лежащей на ободе колеса. Радиус колеса 2 см.

20. Тело вращается так, что зависимость угловой скорости от времени дается уравнением $\omega = 2 + 0,5t$. Найти полное число оборотов, совершённых телом за 20 с после начала вращения.

21. Тело брошено под некоторым углом α к горизонту. Найти величину этого угла, если горизонтальная дальность S полёта тела в четыре раза больше максимальной высоты траектории.

22. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 30 \text{ м/с}$. Определить скорость v , тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения камня в конце второй секунды после начала движения.

23. Тело брошено под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найти тангенциальное a_τ и нормальное a_n ускорения в начальный момент движения.

24. Два бумажных диска насажены на общую горизонтальную ось так, что плоскости их параллельны и отстоят на $d = 30 \text{ см}$ друг от друга. Диски вращаются с частотой $\nu = 2000 \text{ об/мин}$. Пуля, летевшая параллельно оси на расстоянии $r = 12 \text{ см}$ от неё, пробила оба диска. Пробоины в дисках смещены относительно друг друга на расстояние $S = 6 \text{ см}$, считая по дуге окружности. Найти среднюю скорость пули в промежутке между дисками и оценить создаваемое силой тяжести смещение пробоин в вертикальном направлении. Сопротивление воздуха не учитывать.

25. Самолет, летевший на высоте $h = 2940 \text{ м}$ со скоростью 360 км/ч , сбросил бомбу. За какое время t до прохождения над целью и на каком расстоянии S от неё должен самолет сбросить бомбу, чтобы попасть в цель (сопротивлением воздуха пренебречь)?

1.1.2. Динамика поступательного и вращательного движений

Основные формулы

1. Второй закон Ньютона в общем случае выражается формулой

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

где $\vec{P} = m\vec{v}$ - импульс тела (количество движения).

Если $m = \text{const}$, то $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{F}$ - равнодействующая всех сил, приложенных к телу; m и $\vec{a}$ - его масса и ускорение.

2. Третий закон Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, где $\vec{F}_{12}$ и $\vec{F}_{21}$ - силы, с которыми взаимодействуют две материальные точки.

3. Изменение импульса тела (количества движения)

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t \quad \text{или} \quad m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{F}\Delta t,$$

где Δt - отрезок времени, в течение которого действовала сила.

4. Сила, действующая на материальную точку, движущуюся по криволинейной траектории, может быть разложена на соответствующие составляющие - тангенциальную и нормальную. Тангенциальная (касательная) сила

$$\vec{F}_\tau = m\vec{a}_\tau = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad |\vec{F}_\tau| = m\varepsilon,$$

где ε - угловое ускорение, r - радиус кривизны траектории. Нормальная (центростремительная) сила инерции

$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n, \quad |\vec{F}_n| = m \frac{v^2}{r}, \quad |\vec{F}| = m\omega^2 r,$$

где ω - угловая скорость.

5. Сила трения скольжения

$$F_{mp} = \kappa \cdot N,$$

где κ - коэффициент трения скольжения, N - сила нормальной реакции опоры.

6. Момент инерции материальной точки массой m

$$J = m \cdot r^2,$$

где r - расстояние до оси вращения.

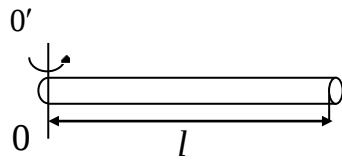
7. Момент инерции тела:

$$J = \int_V \rho \cdot r^2 dV,$$

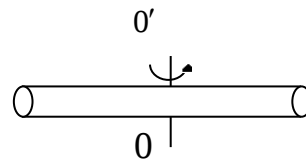
где ρ - плотность тела, интегрирование ведется по всему объему тела V .

8. Моменты инерции некоторых тел относительно оси вращения OO' .

а) однородный тонкий стержень длиной l и массой m :

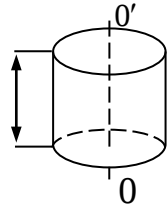


$$J = m \frac{l^2}{3}$$



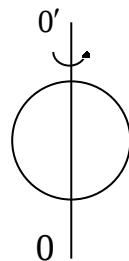
$$J = m \frac{l^2}{12}$$

б) сплошной цилиндр радиусом r , массой m



$$J = m \frac{l^2}{12}$$

в) сплошной шар радиусом r и массой m



$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

9. Теорема Штейнера $J = J_0 + m d^2$, J_0 - момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, J - момент инерции относительно параллельной оси, отстоящей от первой на расстоянии d , m - масса тела.

10. Момент силы и его модуль

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}], \quad M = r \cdot F \cdot \sin \alpha,$$

где α - угол между направлением действия силы F и радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным от оси вращения к точке приложения силы.

11. Момент импульса материальной точки (рис. 1.7) и его модуль

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{P}], \quad L = m \cdot v \cdot r,$$

$$L = J \cdot \omega,$$

где m - масса точки, v - линейная скорость точки, $\vec{P}$ - импульс точки.

12. Основной закон динамики вращательного движения

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt}.$$

Для абсолютно твердого тела

$$\vec{M} = J \vec{\varepsilon}.$$

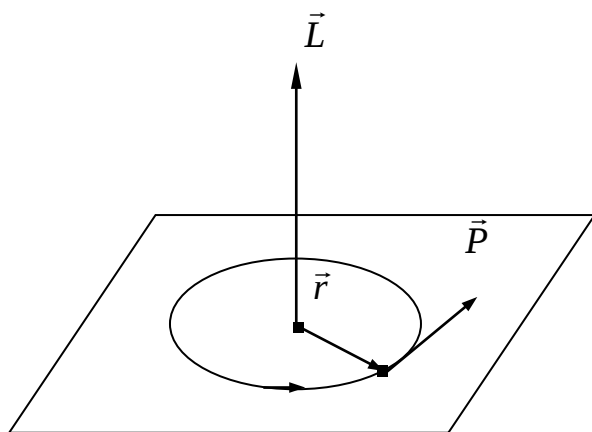


Рис. 1.7

Примеры решения задач

Задача 1. Определить ускорения a_1, a_2 , с которыми движутся грузы m_1, m_2 в установке, изображённой на рис. 1.8, а также силу натяжения нити T . Трением и массой блоков пренебречь. Нить считать невесомой и нерастяжимой.

Решение

На груз m_1 действуют сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила натяжения нити T_1 , на груз m_2 – сила тяжести $m_2\vec{g}$ и силы натяжения T_2, T_3 нитей. Так как можно пренебречь массой нити и массой блока, а также трением, возникающим при вращении блока, то $T_1 = T_2 = T_3 = T$. Запишем второй закон Ньютона в скалярном виде, выбрав направление вниз положительным и считая, что ускорение груза m_1 направлено вниз (а груза m_2 – вверх)

$$m_1 g - T = m_1 a_1; \quad (7)$$

$$m_2 g - 2T = -m_2 a_2 \quad (8)$$

Условия, связывающие модули ускорений грузов a_1 и a_2 , можно получить, учитывая а) условие нерастяжимости нити, б) соотношение между модулями перемещений грузов, происходящих за одно и то же время: $S_1 = 2S_2$. Очевидно, такое же соотношение существует и между модулями ускорений грузов:

$$a_1 = 2a_2. \quad (9)$$

Решая совместно уравнения (7) - (9) получаем:

$$a_1 = \frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2} g;$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2}; \quad T = \frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g.$$

Задача 2. Парашютист массой $m = 100$ кг делает затяжной прыжок с начальной скоростью $v_0 = 0$. Найти закон изменения его скорости до раскрытия парашюта и максимальную скорость, если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения парашютиста. $\vec{F}_c = -K\vec{v}$, где $K = 20$ кг/с (рис. 1.9).

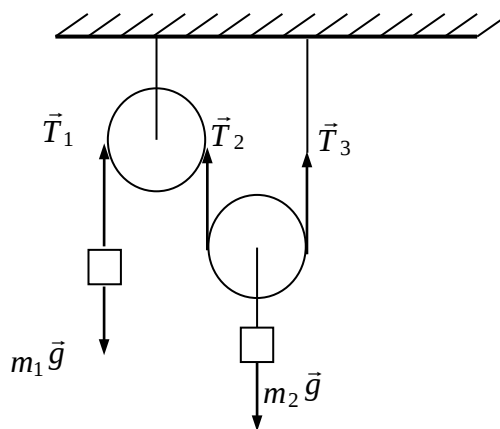


Рис. 1.8.

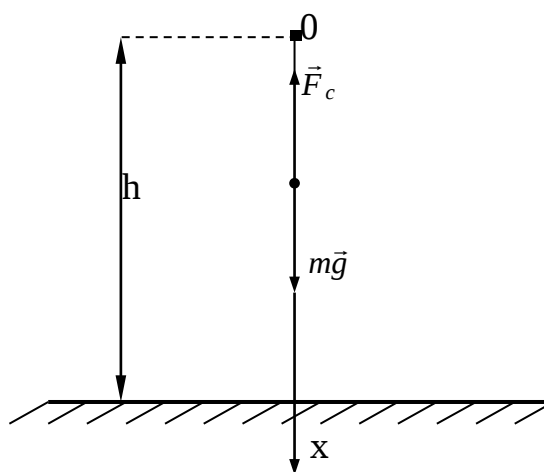


Рис. 1.9

Решение

Начало координат поместим в точку O , из которой начинается движение парашютиста. Ось Ox направим вниз. На парашютиста действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_c = -\kappa\vec{v}$. По второму закону Ньютона получаем дифференциальное уравнение для неизвестной функции v :

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \kappa v.$$

Разделяя переменные, находим

$$-\frac{dv}{mg/\kappa - v} = -\frac{\kappa}{m} dt \quad \text{или} \quad \frac{d(mg/\kappa - v)}{mg/\kappa - v} = -\frac{\kappa}{m} dt.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln(mg/\kappa - v) = -\frac{\kappa}{m} t + C.$$

Константу C определяем из начальных условий:

$$v = v_0(t=0) = 0 \Rightarrow C = \ln(mg/\kappa).$$

После несложных преобразований находим

$$v = mg/\kappa (1 - e^{(-\kappa/m)t}).$$

При $t \rightarrow \infty$ скорость стремится к $v_{\max}$

$$v_{\max} = mg/\kappa = 50 \text{ м/с}.$$

Задача 3. Груз массой $m = 45$ кг вращается на канате длиной $l = 5,0$ м в горизонтальной плоскости, совершая $n = 16,0$ об/мин. Какой угол с вертикалью образует канат и какова сила его натяжения (рис. 1.10)?

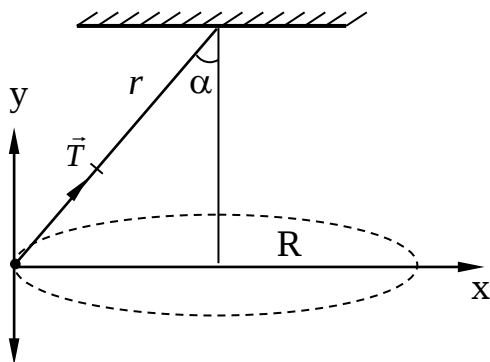


Рис. 1.10

Решение

На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения каната $\vec{T}$. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}. \quad (10)$$

Так как движение по окружности происходит с постоянной по модулю скоростью, то полное ускорение равно нормальному ускорению a_n и направлено к центру окружности радиусом R :

$$a = a_n = v^2/R = 4\pi^2 n^2 R.$$

Выберем оси x и y , как показано на рис. 1.10. Проецируя векторы, входящие в уравнение (10), на оси, получаем

$$oy: T \sin \alpha = m \cdot 4\pi^2 n^2 R, \quad (11)$$

$$ox: T \cos \alpha - mg = 0. \quad (12)$$

Из чертежа видно, что $R = l \sin \alpha$. Решая совместно (11) и (12) с учетом последнего равенства, находим

$$T = 4\pi^2 n^2 l m, \quad \alpha = \arccos(g/4\pi^2 n^2 l);$$

$$T = 0,63 \text{ кН}, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Задача 4. На горизонтальную ось насажен шкив радиусом R . На шкив намотан шнур, к свободному концу которого подвесили гирию массой m . Считая массу M шкива равномерно распределенной по ободу, определить ускорение a , с которым будет опускаться гирия, силу натяжения нити T и силу давления шкива на ось (рис. 1.11).

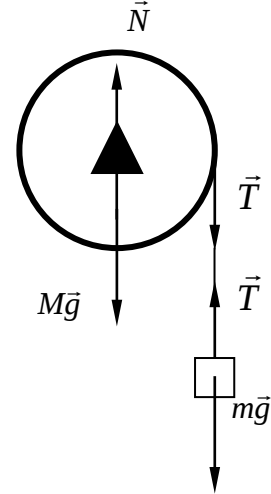


Рис. 1.11.

Решение

Поскольку шкив только вращается, то уравнения движения шкива запишем в виде

$$\sum \vec{F}_i = 0, \quad (13)$$

$$\sum \vec{M}_i = J \cdot \vec{\varepsilon}. \quad (14)$$

На шкив действуют силы тяжести Mg , натяжения нити T , реакции оси N . Сила реакции оси N по третьему закону Ньютона численно равна искомой силе давления шкива на ось. Уравнение (13) можно записать в проекции на ось, направленную вертикально вниз

$$Mg + T - N = 0. \quad (15)$$

Шкив вращается под действием лишь момента силы T . Следовательно, уравнение (14) дает равенство

$$TR = J\varepsilon. \quad (16)$$

Момент инерции шкива, поскольку его масса распределена по ободу,

$$J = M \cdot R^2. \quad (17)$$

Уравнения (15), (16) содержат три неизвестных: T , N , ε . Недостающее уравнению запишем, применив второй закон Ньютона для поступательного движения гири в проекции на ту же ось:

$$mg - T = ma. \quad (18)$$

Так как шнур сматывается без скольжения, ускорение гири равно тангенциальному ускорению точек на ободу шкива и угловое ускорение можно записать

$$\varepsilon = a/R. \quad (19)$$

Подставив в уравнение (16) значения J , ε по формулам (17) и (19) найдем из системы уравнений (15), (16), (18) неизвестные величины:

$$a = \frac{mg}{M + m}, \quad T = \frac{Mmg}{M + m}, \quad N = \frac{M(M + 2m)g}{M + m}.$$

Задачи, рекомендуемые для решения на аудиторных занятиях

Задача 1. Через блок в виде диска, имеющего массу $m = 8 \cdot 10^{-2}$ кг, перекинута тонкая нить, к концам которой подвешены грузы массами $m_1 = 10 \cdot 10^{-2}$ кг и $m_2 = 20 \cdot 10^{-2}$ кг. С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением пренебречь.

Ответ: $2,88 \text{ м/с}^2$.

Задача 2. Автомашина движется с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0,62 \text{ м/с}^2$ по горизонтальной поверхности, описывая окружность радиусом $R = 40 \text{ м}$. Коэффициент трения скольжения между колёсами машины и поверхностью $\kappa = 0,2$. Какой путь пройдет машина без скольжения, если в начальный момент времени её скорость равна нулю?

Ответ: $S = \frac{1}{2} R \sqrt{(\kappa g / a_\tau)^2 - 1} = 60 \text{ м}$.

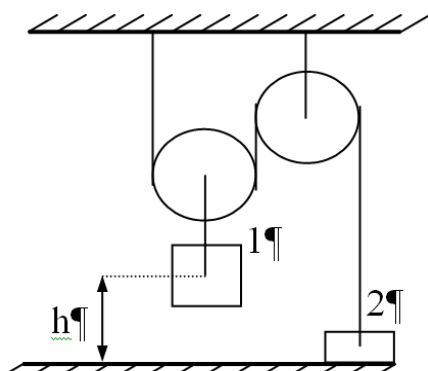


Рис. 1.12

Задача 3. В системе, изображенной на рис.1.12, масса тела 1 в $\eta = 4,0$ раза больше массы тела 2. Высота $h = 20 \text{ см}$. Массы блоков и нитей, а также трение пренебрежимо малы. В некоторый момент тело 2 отпустили, и система пришла в движение. На какую максимальную высоту от пола поднимется тело 2?

Ответ: $H = 6h\eta / (\eta + 4) = 0,6 \text{ м}$.

Задача 4. Шар массой $m = 10 \text{ кг}$ и радиусом $R = 0,2 \text{ м}$ вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Уравнение вращения шара имеет вид $\varphi(t) = A + Bt^2 + Ct^3$, где $A = 5 \text{ рад}$, $B = 4 \text{ рад/с}$, $C = -1 \text{ рад/с}^3$. По какому закону меняется момент сил, действующих на шар? Какова величина момента сил $\vec{M}$ через $t = 2 \text{ с}$?

Ответ: $M = 0,32 (B + 3Ct) = -0,64 \text{ Нм}$.

Задача 5. На вершине двух наклонных плоскостей, образующих с горизонтом углы $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 45^\circ$, укреплен блок. Грузы $m_1 = 1,0 \text{ кг}$ и $m_2 = 2,0 \text{ кг}$ соединены нитью, перекинутой через блок. Определить ускорение a , с которым начнут двигаться грузы вдоль наклонных плоскостей, и силу натяжения T нити. Коэффициенты трения грузов о плоскости равны между собой: $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, $\mu = 0,1$. Блок и нить считать невесомыми, трение в оси блока не учитывать.

Ответ: $a = \frac{[m_2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_1(\sin \beta + \mu \cos \beta)]g}{(m_1 + m_2)} = 0,18 \text{ м/с}^2$;

$T = \frac{[\sin \alpha + \sin \beta - \mu(\cos \alpha - \cos \beta)] \cdot m_1 m_2 g}{(m_1 + m_2)} = 7,9 \text{ Н}$.

Домашнее задание

1. Два бруска с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 4$ кг, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу $F = 10$ Н, направленную горизонтально? Какова будет сила F натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу 10 Н приложить к первому бруску? Ко второму бруску? Трением пренебречь.

2. На гладком столе лежит брусок массой $m = 4$ кг. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найти ускорение a , с которым движется брусок, и силу F натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь.

3. Брусок массой 2 кг скользит по горизонтальной поверхности под действием груза массой 0,5 кг, прикрепленного к концу нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок. Коэффициент трения бруска о поверхность 0,1. Найти ускорение движения тела и силу натяжения нити. Массами блока и нити, а также трением в блоке пренебречь.

4. Акробат на мотоцикле описывает "мертвую петлю" радиусом $R = 4$ м. С какой наименьшей скоростью v_{min} должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться?

5. Самолет описывает петлю Нестерова радиусом $R = 200$ м. Во сколько раз сила F , с которой летчик давит на сиденье в нижней точке петли, больше веса G летчика, если скорость самолета $v = 100$ м/с?

6. Груз, привязанный к шнуру длиной $l = 50$ см, описывает окружность в горизонтальной плоскости, делая 1 об/с. Какой угол образует шнур с вертикалью?

7. Груз, привязанный к нити длиной $l = 1$ м, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Определить период T обращения, если нить отклонена на угол $\alpha = 60^\circ$ от вертикали.

8. Автомобиль массой $m = 5$ т движется со скоростью $v = 10$ м/с по выпуклому мосту. Определить силу F давления автомобиля на мост в его верхней части, если радиус кривизны моста $R = 50$ м.

9. Автомобиль идет по закруглению шоссе, радиус кривизны которого $R = 200$ м. Коэффициент трения колес о покрытие дороги $k = 0,1$ (гололед). При какой скорости v автомобиля начнется его занос?

10. Какую наибольшую скорость v_{max} может развить велосипедист, проезжая закругление радиусом $R = 50$ м, если коэффициент трения скольжения между шипами и асфальтом $k = 0,3$? Каков угол α отклонения велосипедиста от вертикали, когда велосипедист движется по закруглению?

11. Наклонная плоскость, образующая угол $\alpha = 25^\circ$ с плоскостью горизонта, имеет длину $l = 2$ м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время $t = 2$ с. Определить коэффициент трения k тела о плоскость.

12. Материальная точка с массой $m = 2$ кг движется под действием некоторой силы, согласно уравнению $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, где $C = 1$ м/с²; $D = -0,2$ м/с³. Найти значение этой силы в моменты времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с. В какой момент времени сила равна нулю?

13. Тело скользит равномерно по наклонной плоскости с углом наклона 40° . Определить коэффициент трения тела о плоскость.

14. Автомобиль массой 1 т поднимается по шоссе с уклоном 30° под действием силы тяги 7 кН. Найти ускорение автомобиля, считая, что сила сопротивления не зависит от скорости и составляет 0,1 от нормальной реакции опоры.

15. Аэростат массы m начал опускаться с постоянным ускорением a . Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх. Сопротивлением воздуха пренебречь.

16. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два соприкасающихся бруска 1 и 2 (рис. 1.13). Массы брусков равны m_1 и m_2 , коэффициенты трения между наклонной плоскостью и этими брусками соответственно k_1 и k_2 , причём $k_1 > k_2$. Найти 1) силу взаимодействия между брусками в процессе движения; 2) минимальное значение угла α , при котором начнется скольжение.

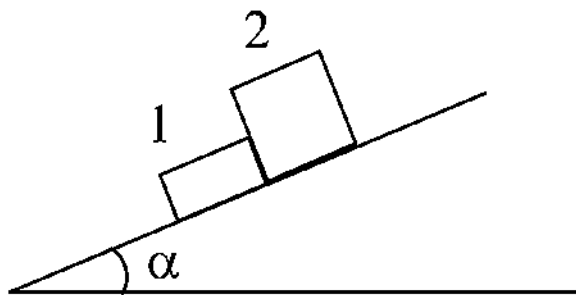


Рис. 1.13

17. Небольшое тело A начинает скользить с вершины клина, основание которого $l = 2,1$ м (рис. 1.14). Коэффициент трения между телом и поверхностью клина $k = 0,14$. При каком значении угла α время соскальзывания будет минимальным? Чему оно равно?

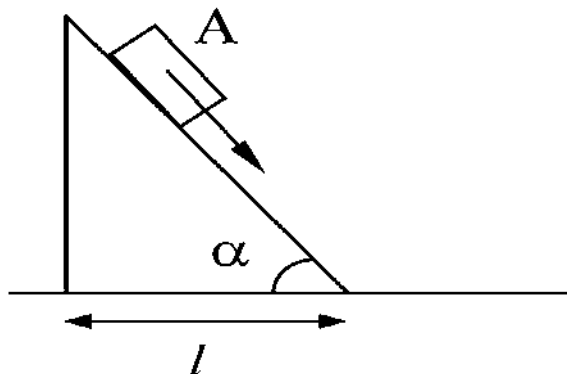


Рис. 1.14

18. Брусок массы m втаскивают за нить с постоянной скоростью вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 1.15). Коэффициент трения равен k . Найти угол β , который должна составлять нить с наклонной плоскостью, чтобы натяжение нити было наименьшим. Чему оно равно?

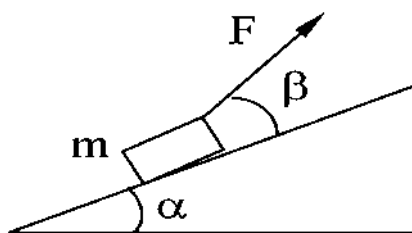


Рис. 1.15

19. В системе (рис. 1.16) массы тел равны m_0, m_1, m_2 , трения нет, массы блоков и нитей пренебрежимо малы. Найти ускорение тела m_1 . Исследовать возможные случаи

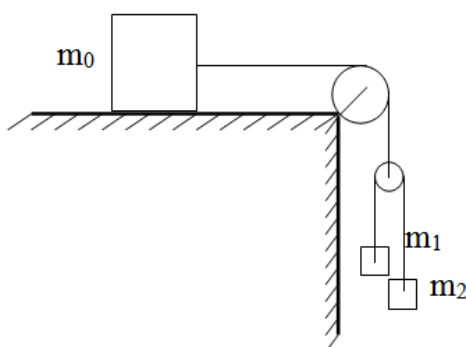


Рис 1.16

20. Частица массой m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \sin \omega \cdot t$, где F_0 и ω - постоянные. Найти путь, пройденный частицей, в зависимости от времени t . Изобразить примерный график этой зависимости.

21. Частица массой m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием силы $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega \cdot t$, где F_0 и ω - постоянные. Сколько времени частица будет двигаться до первой остановки? Какой путь она пройдет за это время? Какова максимальная скорость частиц на этом пути?

22. Две гири разного веса соединены нитью и перекинута через блок, момент инерции которого $J = 50 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ и радиус $R = 20 \text{ см}$. Блок вращается с трением и момент сил трения равен $M_{\text{тр}} = 98,1 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Найти разность натяжения нити $T_1 - T_2$ по обе стороны блока, если известно, что блок вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 2,36 \text{ рад/с}^2$.

23. Невесомый блок укреплен на конце стола (рис. 1.17). Гири массами $m_1 = m_2 = 1 \text{ кг}$ соединены нитью и перекинута через блок. Коэффициент трения гири массой m_1 о стол равен $k = 0,1$. Найти 1) ускорение, с которым движутся гири, 2) натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

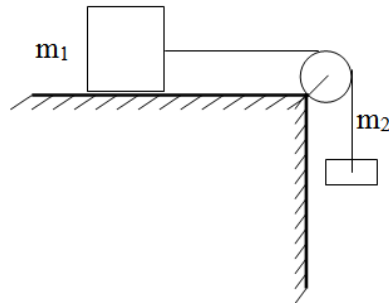


Рис. 1.17

24. На ступенчатый вал, радиусы которого 0,3 и 0,1 м, намотаны в противоположных направлениях нити. К концам нитей привязаны грузы массой 1 кг каждый, момент инерции вала 0,3 кг·м². Пренебрегая силой трения, определить ускорения грузов, натяжения нитей (рис. 1.18).

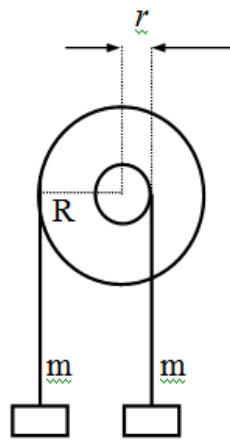


Рис. 1.18

25. Катушку ниток, лежащую на столе, плавно тянут под углом α к горизонтальной поверхности с силой $F = 0,1$ Н за конец нитки. Радиус катушки $R = 0,05$, её масса $m = 20$ г, намотанные нитки имеют цилиндрическую поверхность радиусом $r = 0,45$ см. Момент инерции катушки считать постоянным и равным $J = 4 \cdot 10^{-5}$ кг·м². Определить величину и направление линейного ускорения катушки, катящейся без скольжения по столу, если $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 10^\circ$ (рис.1.19).

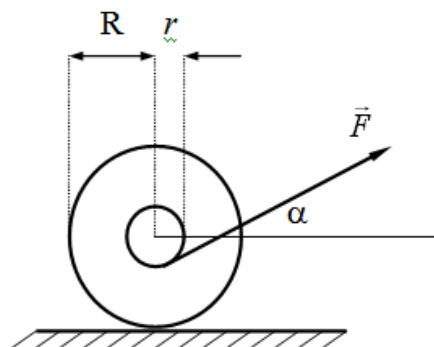


Рис. 1.19

Варианты домашнего задания

№ варианта	Тема 1	Тема 2
1	1,25,13	13,1,25
2	2,24,14	6,2,24
3	3,23,15	18,3,23
4	4,22,16	2,4,22
5	5,21,17	1,5,21
6	6,20,18	5,6,18
7	7,19,1	3,7,19
8	8,18,2	17,8,18
9	9,17,3	19,9,17
10	10,16,4	20,10,16
11	11,15,5	8,11,15
12	12,14,6	7,12,19
13	13,25,7	9,13,3
14	14,1,8	16,11,5
15	15,2,9	10,15,17
16	16,3,10	11,16,25
17	17,4,11	21,17,9
18	18,5,12	14,18,8
19	19,6,13	22,19,10
20	21,8,15	25,20,11
21	20,7,14	23,16,12
22	22,9,16	24,20,13
23	23,10,17	12,22,14
24	24,11,18	1,24,15
25	25,12,19	16,25,2

1.2. Законы сохранения. Элементы СТО

1.2.1. Механическая работа, энергия, мощность. Закон сохранения энергии. Импульс. Закон сохранения импульса. Момент импульса. Закон сохранения момента импульса

Основные формулы и понятия

1. Механическая работа силы:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}.$$

2. Кинетическая энергия тела массой m , движущегося со скоростью, v ,

$$T = mv^2 / 2.$$

3. Потенциальная энергия зависит от рода действующих в системе консервативных сил:

$$U = \int \vec{F}_k d\vec{r} + C,$$

где C -постоянная интегрирования.

4. Полная механическая энергия механической системы равна сумме кинетических и потенциальных энергий, составляющих систему тел.

5. Закон сохранения энергии: полная механическая энергия консервативной системы остается постоянной.

$$E = const.$$

В неконсервативной системе изменение энергии равно работе неконсервативных сил.

$$dE = dA_{HK}.$$

6. Импульс движущегося тела

$$\vec{P} = m\vec{v}.$$

7. Импульс системы тел

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i,$$

где n -количество тел в системе.

8. Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел остаётся постоянным:

$$\vec{P} = const.$$

В незамкнутой системе скорость изменения импульса равна равнодействующей всех внешних сил, действующих на систему.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}.$$

9. Момент импульса точки, движущейся по окружности, радиус-вектор которой $\vec{r}$, а импульс $\vec{p}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}].$$

10. Момент импульса системы тел

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i,$$

где n -количество тел системы.

11. Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы тел остается постоянным:

$$\vec{L} = \text{const}.$$

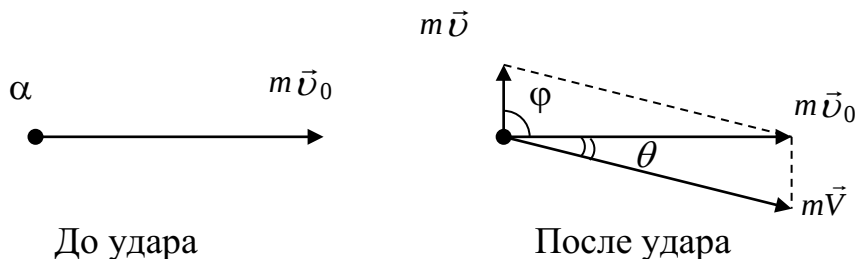
В незамкнутой системе скорость изменения момента импульса равна результирующему моменту внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Примечание. В незамкнутых системах импульсы (а также момент импульса) могут быть постоянными вдоль тех направлений, для которых результирующая всех сил равна нулю (результирующий момент всех сил равен нулю).

Примеры решения задач

Задача 1. α - частица, имеющая массу m , летящая со скоростью v_0 , испытывает упругое соударение с неподвижным ядром массы M и летит под углом $\varphi = 90^\circ$ к первоначальному направлению движения. Определить скорость α - частицы v и ядра V после столкновения. Определить также угол между направлением скорости вылетающего ядра и первоначальным направлением движения α - частицы.



Решение

Систему α - частица - ядро можно считать замкнутой, поэтому для нее справедливы законы сохранения импульса и энергии (удар упругий). В результате удара импульс и энергия, которыми обладала α - частица, перераспределяются между двумя частицами:

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v} + M\vec{V}, \quad (1)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}. \quad (2)$$

Для нахождения неизвестных величин воспользуемся векторным треугольником импульсов, изображенным на рисунке. Из треугольника следует:

$$(MV)^2 = (mv)^2 + (mv_0)^2. \quad (3)$$

Разделим почленно обе части уравнения (3) на m^2 , а уравнения (2) - на m . Получим следующую систему уравнений:

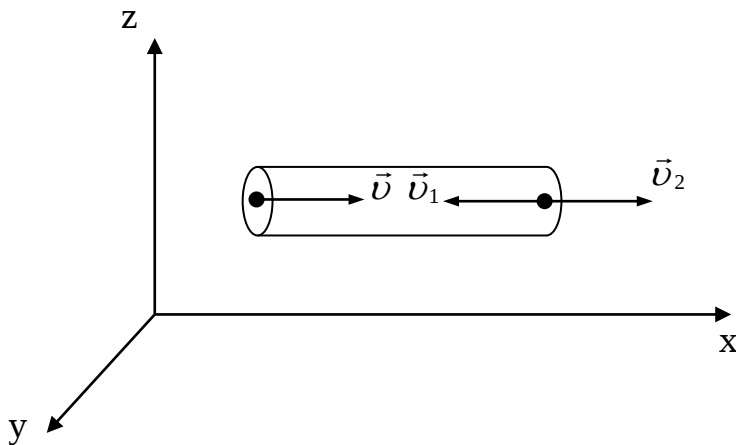
$$\begin{cases} \left(\frac{M}{m}\right)^2 V^2 = v^2 + v_0^2 \\ v_0^2 = v^2 + \frac{M}{m} V^2 \end{cases}$$

Из нее определим искомые величины:

$$V = \frac{v_0 m}{M} \sqrt{\frac{2M}{M+m}}, \quad v = v_0 \sqrt{\frac{M-m}{M+m}}.$$

Из векторного треугольника найдем угол θ :

$$\theta = \arctg \sqrt{\frac{M-m}{2M}}.$$



Задача 2.

На гладком столе лежит пробирка длиной l и массой M . В открытый конец пробирки влетает упругий шарик массы m со скоростью v , отражается от дна и летит обратно. Какой путь пройдет пробирка к тому моменту, когда шарик вылетит из нее? Что будет при $M = m$?

Решение

Удар шарика о пробирку абсолютно упругий. Обозначим через v скорость шарика до удара о пробирку; v_1 - скорость шарика после удара о пробирку; v_2 - скорость пробирки после удара. За положительное направление X выберем направление полета шарика со скоростью v . На основе законов сохранения импульса (в проекции на ось X) и кинетической энергии имеем

$$m\nu = M\nu_2 - m\nu_1, \quad \frac{m\nu^2}{2} = \frac{m\nu_1^2}{2} + \frac{M\nu_2^2}{2}.$$

Из этой системы уравнений находим скорости ν_1 и ν_2 .

$$\nu_1 = \frac{(M - m)\nu}{m + M}, \quad \nu_2 = \frac{2m\nu}{M + m}.$$

Время движения шарика в пробирке $t = l / (\nu_1 + \nu_2)$, где l - длина пробирки, а $\nu_1 + \nu_2$ - скорость движения шарика относительно пробирки.

$$t = \frac{l}{\frac{2m\nu}{m + M} + \frac{(M - m)\nu}{m + M}} = \frac{l}{\nu}.$$

Путь, пройденный пробиркой за это время, равен

$$S = \nu_2 \cdot t = \frac{2m\nu}{M + m} \cdot \frac{l}{\nu} = \frac{2lm}{M + m}.$$

Если $M = m$, то шарик полностью передает свой импульс пробирке, и пробирка пройдет путь $S = l$, а шарик относительно земли будет покоиться.

Задача 3. С какой скоростью упадет на поверхность Луны метеорит, скорость которого вдали от Луны мала? Атмосфера на Луне отсутствует. Масса Луны $M = 7,35 \cdot 10^{22}$ кг, радиус Луны $R = 1,74 \cdot 10^6$ м.

Решение

В поле тяжести любой планеты тело имеет как кинетическую, так и потенциальную энергию. Если считать, что тела, находящиеся в бесконечности, не взаимодействуют, т.е. их потенциальная энергия равна нулю, то полная механическая энергия вдали от Луны также равна нулю (т.к. по условию задачи скорость метеорита мала). По закону сохранения механической энергии для метеорита, находящегося у поверхности Луны, можно записать

$$T + U = 0 \quad \text{или} \quad \frac{m\nu^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{R} = 0,$$

где m - масса метеорита, ν - его скорость, γ - гравитационная постоянная.

Таким образом, скорость метеорита у поверхности Луны равна

$$\nu = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}},$$

$$\nu = 2,35 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

Задача 4. На какой угол φ надо отклонить однородный стержень, подвешенный на горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня, чтобы нижний конец стержня при прохождении им положения равновесия имел скорость $\nu = 5$ м/с? Длина стержня $l = 1$ м.

Решение

К процессу движения стержня можно применить закон сохранения энергии в механике. В отклоненном положении стержень обладает потенциальной энергией:

$$U = mgh,$$

где m - масса стержня, h - высота поднятия центра масс стержня от положения равновесия.

В момент прохождения стержнем положения равновесия он приобретает кинетическую энергию, равную

$$T = \frac{J\omega^2}{2},$$

где J - момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его конец, ω - угловая скорость вращения.

По закону сохранения энергии

$$mgh = J\omega^2. \quad (1)$$

Из рис. 1.20 следует, что

$$h = \frac{l}{2}(1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

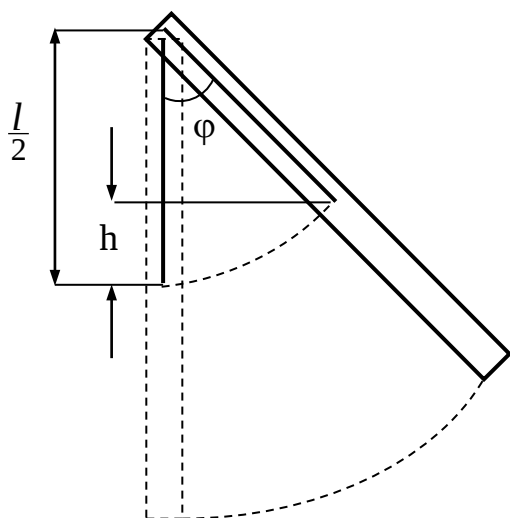


Рис. 1.20

Так как все точки стержня имеют одинаковую угловую скорость, то для нижнего конца стержня можно записать

$$\omega = v / l. \quad (3)$$

Подставляя (3) и (2) в формулу (1) и учитывая, что $J = \frac{1}{3}ml^2$, получим

$$\varphi = \arccos(1 - v^2 / 3gl).$$

После подстановки численных значений найдем угол φ .

$$\varphi = \arccos(1 - 5^2 / 3 \cdot 9,8 \cdot 1); \quad \varphi = 81^\circ.$$

Задача 5. Снаряд массой $m = 10$ кг обладал в верхней точке траектории скоростью $v = 200$ м/с. В этой точке он разорвался на две части. Меньшая часть массой $m_1 = 3$ кг полетела вперед под углом $\varphi = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $U_1 = 400$ м/с. Определить, с какой скоростью U_2 и под каким углом к горизонту α полетела большая часть.

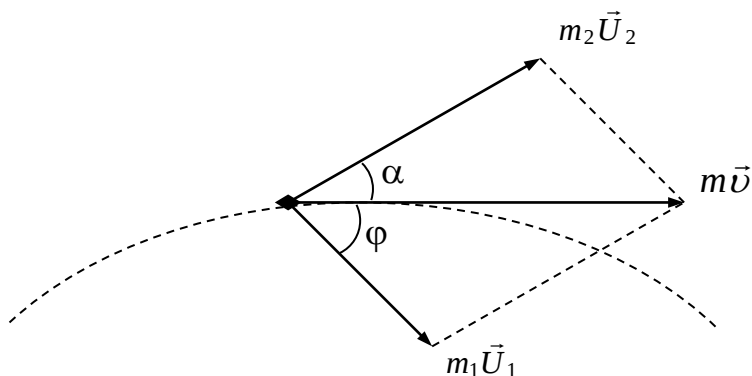
Решение

Если обе части снаряда рассматривать как систему тел, то она будет замкнутой, так как силы давления газов, под действием которых меняются скорости движения осколков, будут являться внутренними силами.

Для замкнутой системы тел справедлив закон сохранения импульса. Импульс системы равен векторной сумме импульсов осколков (см. рис.):

$$m\vec{v} = m_1\vec{U}_1 + m_2\vec{U}_2.$$

До взрыва импульс снаряда $m\vec{v}$ направлен горизонтально. После взрыва импульс меньшего осколка направлен под углом φ к этому направлению, следовательно, направление импульса большего осколка можно определить по векторной диаграмме.



Для нахождения U_2 воспользуемся теоремой косинусов:

$$(m_2U_2)^2 = (m\nu)^2 + (m_1U_1)^2 - 2(m\nu)(m_1U_1)\cos\varphi,$$

откуда в скалярной форме для U_2 имеем

$$U_2 = \frac{1}{m^2} \sqrt{(m\nu)^2 + (m_1U_1)^2 - 2(m\nu)(m_1U_1)\cos\varphi}.$$

Учитывая, что $m_2 = m - m_1$, после подстановки численных значений получим

$$U_2 = 248 \text{ м/с.}$$

Для нахождения угла α воспользуемся еще раз теоремой косинусов:

$$\cos\alpha = \frac{(m_2U_2)^2 + (m\nu)^2 - (m_1U_1)^2}{2(m_2U_2)(m\nu)},$$

$$\alpha = 12^\circ.$$

Задача 6. Горизонтально расположенный стержень массой $m = 0,8$ кг и длиной $l = 1,8$ м может вращаться вокруг перпендикулярной к нему вертикальной оси, проходящей через его середину. В конец стержня попадает и застревает в нём пуля массы $m' = 3$ г, летящая горизонтально перпендикулярно к оси и к стержню со скоростью $v_0 = 50$ м/с. Определить угловую скорость ω , с которой начнёт вращаться стержень.

Решение

Систему стержень-пуля можно считать замкнутой. Поэтому по закону сохранения момента импульса системы имеем

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2, \quad (1)$$

где $\vec{L}_1 = \vec{L}_{01} + \vec{L}_{02}$ - суммарный момент импульса стержня и пули в начальный момент удара (пуля коснулась стержня и начала углубляться в него), $\vec{L}_2 = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ - суммарный момент импульса стержня и пули в конечный момент удара (пуля углубилась в стержень и начала вместе с ним вращаться с угловой скоростью ω).

В начальный момент угловая скорость стержня $\omega_0 = 0$, поэтому

$$L_{01} = J \omega_0 = 0,$$

а момент импульса пули $L_{02} = m' v_0 r$, где r - расстояние от оси вращения до точки попадания пули.

В конечный момент удара, когда пуля потеряла скорость, стержень приобрел угловую скорость ω , поэтому

$$L'_1 = J \omega.$$

Момент импульса пули в этот же момент времени:

$$L'_2 = m' v r = m' r^2 \omega.$$

Учитывая, что момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр, равен $J = \frac{1}{12} m l^2$ и $r = \frac{l}{2}$, после подстановки всех формул в (1) в проекции на ось, совпадающую с осью вращения стержня, получаем

$$\frac{1}{2} m' v_0 l = \frac{1}{12} m l^2 \omega + \frac{1}{4} m' l^2 \omega,$$

откуда угловая скорость вращения равна

$$\omega = \frac{6 m' v_0}{l(m + 3 m')}.$$

Производя вычисления, находим

$$\omega = 0,62 \text{ рад/с.}$$

Задача 7. В центре скамьи Жуковского стоит человек и держит в руках металлический стержень, расположенный вертикально по оси вращения скамьи. При этом скамья вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 4$ рад/с. Момент инерции человека и скамьи $J = 6$ кг·м². Длина стержня $l = 1,5$ м, его масса $m = 8$ кг. Определить число оборотов скамьи в секунду, если ось вращения скамьи проходит через середину стержня, и человек повернёт стержень в горизонтальное положение.

Решение

Человек, держащий стержень, составляет вместе со скамьёй замкнутую систему, так как не действуют моменты внешних сил относительно оси вращения, то момент импульса $L = J\omega$ этой системы должен иметь постоянное значение. Следовательно, для данного случая

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где $J_1\omega_1$ - момент импульса скамьи и человека, держащего стержень вертикально (рис. 1а), а $J_2\omega_2$ - момент импульса скамьи и человека, держащего стержень горизонтально (рис. 1б).

Поскольку $J_1 = J + J_{cm} = J$ ($J_{cm} = 0$, так как стержень расположен вдоль оси), $J_2 = J + J'_{cm}$, где $J' = \frac{1}{12}ml^2$, то получаем

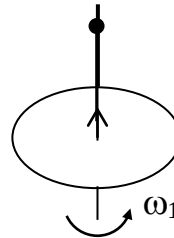


Рис. 1 а

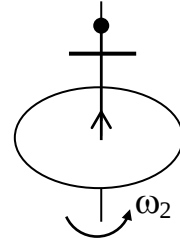


Рис. 1 б

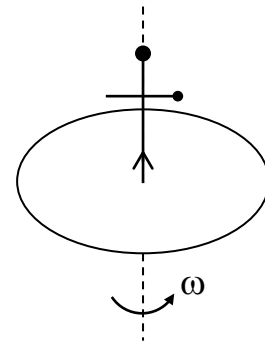
$$J\omega_1 = \left(J + \frac{1}{12}ml^2 \right) \omega_2.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{J\omega_1}{J + \frac{1}{12}ml^2}, \quad \text{а} \quad \nu = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{J\omega_1}{2\pi \left(J + \frac{1}{12}ml^2 \right)}.$$

Производя вычисления, получим $\nu = 0,51$ об/с.

Задача 8. Человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и ловит мяч массой $m = 0,3$ кг, летящий в горизонтальном направлении на расстоянии $l = 60$ см от вертикальной оси вращения скамейки. После этого скамья начала поворачиваться с угловой скоростью $\omega = 1$ рад/с. Момент инерции человека и скамьи $J = 6$ кг·м². Определить скорость мяча.



Решение

Человек и скамья Жуковского представляют собой систему, на которую не действуют моменты сил относительно вертикальной оси. Поэтому систему человек - скамья Жуковского можем рассматривать как замкнутую. Мяч, летящий со скоростью v относительно вертикальной оси скамьи, имеет момент импульса, равный $L = mv l$, где l - расстояние от оси вращения скамьи до направления полёта мяча. В тот момент, когда человек поймал мяч, происходит передача момента импульса от мяча человеку, стоящему на скамье. По закону сохранения момента импульса запишем:

$$L_1 = L_2 \quad \text{или} \quad L_1 = J'\omega,$$

где J' - суммарный момент инерции скамьи, человека и мяча. Считая мяч материальной точкой, для J' получим выражение $J' = J + ml^2$, где J - момент скамьи с человеком.

Таким образом

$$Mvl = (J + ml^2)\omega.$$

Откуда для скорости мяча в окончательном варианте получим:

$$v = (J + ml^2)\omega / ml, \quad v = 34 \text{ м/с}.$$

Задачи, рекомендуемые для решения на аудиторных занятиях

1. Пуля массой $m = 10$ г, двигавшаяся со скоростью $v = 200$ м/с, врезалась в доску и углубилась в нее на расстояние $l = 4$ см. Определить время движения пули в доске.

Ответ: $t = 4 \cdot 10^{-4}$ с.

2. Нейтрон (масса m_0) ударяется о неподвижное ядро углерода ($m = 12 m_0$). Считая удар центральным и упругим, найти, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия нейтрона при ударе?

Ответ: в 1,4 раза.

3. Два стальных шара подвешены на нитях так, что при их касании центры тяжести находятся на расстоянии $l = 1$ м ниже точек подвеса, а нити вертикальны. Меньший шар отводят в сторону так, что нить отклоняется на угол $\alpha = 90^\circ$, и отпускают. Считая шары абсолютно упругими, определить, на какую высоту они поднимутся после удара. Массы шаров: $m_1 = 800$ г и $m_2 = 200$ г.

$$\text{Ответ: } h_1 = l \frac{4m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} = 16 \text{ см}, \quad h_2 = l \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = 36 \text{ см}.$$

4. Небольшое тело скользит с вершины сферы вниз. На какой высоте h от вершины сферы тело оторвется от поверхности сферы и полетит вниз? Трение не учитывать. Радиус сферы R .

Ответ: $h = R/3$.

5. С какой наименьшей высоты H должен съехать велосипедист, чтобы по инерции, без трения, проехать дорожку, имевшую форму петли радиусом $R = 3$ м, и не оторваться от дорожки в верхней точке "мертвой петли"? Масса велосипедиста вместе с велосипедом $m = 75$ кг, причем на массу колес приходится $m_1 = 3$ кг. Колеса велосипеда считать обручами.

$$\text{Ответ: } H = 2R + \frac{R}{2} \left(1 + \frac{m_1}{m} \right) = 7,56 \text{ м}.$$

6. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на очень легком жестком стержне, и застревает в нём. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно $l = 1$ м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклоняется от удара пули на $\alpha = 10^\circ$.

Ответ: $v = 550$ м/с.

7. Человек массой 60 кг находится на неподвижной платформе массой 100 кг. Какое число оборотов в минуту будет делать платформа, если человек будет двигаться по окружности платформы радиусом 5 м вокруг оси вращения? Скорость человека относительно платформы 4 км/час. Считать платформу однородным диском, а человека - материальной точкой.

Ответ: $\nu = 0,49$ об/мин.

8. Имеются два стационарных поля: 1) $F_1 = ay\vec{i}$ и

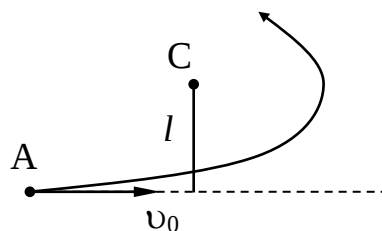
2) $\vec{F}_2 = ax\vec{i} + by\vec{j}$, где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей, a и b - некоторые постоянные. Вычислить, являются ли эти поля потенциальными.

Ответ: потенциальным является второе поле.

9. Тело массой m движется вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Начальная скорость тела равна v_0 , коэффициент трения о плоскость - k , Какой путь пройдёт тело до остановки?

Ответ: $S = v_0^2 / 2g (\sin \alpha + k \cos \alpha)$

10. Некоторое космическое тело k движется к Солнцу, имея вдали скорость v_0 и прицельный параметр l (плечо вектора $\vec{v}_0$ относительно центра Солнца) (см. чертёж). Найти наименьшее расстояние, на которое это тело приблизится к Солнцу.



Ответ: $r_{\min} = \frac{\gamma M}{v_0^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{lv_0^2}{\gamma M} \right)^2} - 1 \right)$.

11. Водометный двигатель катера забирает воду из реки и выбрасывает ее со скоростью $U = 10$ м/с относительно катера назад. Масса

катера $M = 1000$ кг. Масса ежесекундно отбрасываемой воды постоянна и равна $m = 10$ кг/с. Определить скорость катера спустя $t = 1$ мин после начала движения. Какой предельной скорости может достигнуть катер?

Ответ: $v = U(1 - e^{-mt/M}) = 4,5$ м/с,

$$v_{\max} = U = 10 \text{ м/с.}$$

12. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на высоте $h = 19,6$ м на две равные части. Через время $t = 1$ с после взрыва одна часть падает на землю точно под местом взрыва. На каком расстоянии S_2 от места выстрела упадёт вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии $S_1 = 1000$ м? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: $S_2 = 5000$ м.

13. Работа, затраченная на толкание ядра массой $m = 2$ кг, брошенного под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, равна $A = 216$ Дж. Через сколько времени t и на каком расстоянии S от места бросания ядро упадет на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: $t = 1,5$ с, $S = 19,1$ м.

14. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется навстречу второму телу, масса которого $m_2 = 1,5$ кг, и неупруго сталкивается с ним. Скорость тел непосредственно перед столкновением была равна соответственно $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Сколько времени будут двигаться эти тела после столкновения, если коэффициент трения равен $k = 0,015$?

Ответ: $\Delta t = 1,9$ с.

Домашнее задание

1. Два шара подвешены на тонких параллельных нитях и касаются друг друга. Меньший шар отводится на угол 90° от первоначального положения и отпускается. После удара шары поднимаются на одинаковую высоту. Определить массу меньшего шара, если масса большего $0,6$ кг, а удар абсолютно упругий.

2. Два груза массами $m_1 = 10$ кг и $m_2 = 15$ кг подвешены на нитях длиной $l = 2$ м так, что соприкасаются между собой. Меньший груз был отклонен на угол $\alpha = 60^\circ$ и отпущен. На какую высоту поднимутся оба груза после удара? Удар считать неупругим.

3. Снаряд в верхней точке траектории на высоте $h = 100$ м разорвался на два осколка с массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 1,5$ кг. Скорость снаряда в этой точке $v_0 = 100$ м/с. Скорость большего осколка v_2 оказалась горизонтальной, совпадающей по направлению с v_0 и равной 250 м/с. Определить расстояние S между точками падения обоих осколков. Сопротивление воздуха не учитывать.

4. Снаряд разрывается в верхней точке траектории на высоте $h = 19,6$ м на две одинаковые части. Через время $t = 0,5$ с после взрыва одна часть падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии S_2 от места выстрела упадет вторая часть снаряда, если первая упала на расстоянии $S_1 = 1000$ м? Сопротивление воздуха не учитывать.

5. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 16$ м/с. Найти кинетическую и потенциальную энергию тела спустя одну секунду после начала движения. На какой высоте кинетическая энергия тела равна его потенциальной энергии? Масса тела равна $m = 0,2$ кг.

6. На нити, перекинутой через блок, подвешены два груза неравных масс m_1 и m_2 . Найти ускорение грузов, используя закон сохранения энергии.

7. Работа, затраченная на толкание ядра массой $m = 2$ кг, брошенного под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, равна $A = 216$ Дж. Через сколько времени t и на каком расстоянии S от места бросания ядро упадет на землю?

8. Тело массой m движется вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Начальная скорость тела - v_0 , коэффициент трения тела о плоскость - k . Какой путь S пройдет тело до остановки и какая на этом пути работа силы трения?

9. Вентилятор вращается с частотой $n_0 = 900$ об/мин. После выключения вентилятор вращался равнозамедленно и сделал до остановки $N = 75$ оборотов. Работа сил торможения $A = 44,4$ Дж. Найти момент сил торможения вентилятора и момент инерции.

10. Маховик в виде диска массой $m = 50$ кг и радиусом $R = 20$ см раскручен до частоты $n_1 = 480$ об/мин и затем предоставлен самому себе. Под влиянием трения маховик остановился. Найти момент сил трения, считая его постоянным. Маховик остановился через $t = 50$ с.

11. Мальчик катит обруч по горизонтальной дороге со скоростью $v = 7,2$ м/с. На какое расстояние l может вкатиться обруч на горку за счет его кинетической энергии? Уклон горы равен 10 м на каждые 100 м пути.

12. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую наименьшую скорость он должен иметь, чтобы, выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму "мертвой петли" радиусом $R = 4$ м?

13. Небольшое тело начинает скользить с высоты h по наклонному желобу, переходящему в полуокружность радиусом $h/2$. Пренебрегая трением, найти скорость тела в момент отрыва от желоба.

14. Конькобежец массой $M = 70$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 3$ кг со скоростью $v = 8$ м/с относительно земли. Найти, на какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $k = 0,02$.

15. Конькобежец, разогнавшись до скорости $v = 27$ км/ч, въезжает на ледяную гору. На какую высоту от начального уровня поднимется конькобежец с разгона, если уклон горы составляет $h = 0,5$ м на каждые $S = 10$ м пути по горизонтали и коэффициент трения коньков о лед $k = 0,02$?

16. Падающим с высоты $h = 1,2$ м грузом забивают сваю, которая от удара уходит в землю на $S = 2$ см. Определить среднюю силу удара F и его продолжительность τ , если масса груза $m = 500$ кг, масса сваи много меньше массы груза.

17. Молот массой $m = 200$ кг падает на поковку, масса которой вместе с наковальней $M = 2,5$ тонны. Скорость молота в момент удара равна 2 м/с. Найти энергию, затраченную на деформацию поковки, и к.п.д. удара молота о поковку.

18. Боек (ударная часть) свайного молота массой $m_1 = 500$ кг падает на сваю массой $m_2 = 100$ кг со скоростью $v_1 = 4$ м/с. Определить: а) кинетическую энергию бояка в момент удара; б) энергию, затраченную на деформацию сваи; в) энергию, затраченную на углубление сваи в грунт; г) к.п.д. удара бояка о сваю. Удар рассматривать как неупругий.

19. Молоток, масса которого $M = 1$ кг, забивает в стену гвоздь массой $m = 50$ г. Определить к.п.д. удара молотка.

20. От двухступенчатой ракеты общей массой $M = 1000$ кг в момент достижения скорости $v_0 = 171$ м/с отделилась вторая ступень массой $m = 400$ кг. Ее скорость при этом увеличилась до $v_2 = 185$ м/с. Найти, с какой скоростью v_1 стала двигаться первая ступень ракеты. Скорости указаны относительно наблюдателя, находящегося на земле.

21. Из реактивной установки массой $M = 0,5$ т, находящейся первоначально в покое, в горизонтальном направлении выбрасывается последовательно две порции вещества со скоростью $v_0 = 1000$ м/с относительно установки. Масса каждой порции $m = 25$ кг. Какой станет скорость установки v_2 после выброса второй порции? Трение не учитывать.

22. Ракету массой M запускают вертикально. Скорость истечения газов из сопла двигателя равна v . При каком расходе топлива (массы в единицу времени) сила тяги двигателя будет достаточна, чтобы: а) уравновесить действующую на ракету силу тяжести, б) сообщить ракете ускорение $a = 19,6$ м/с?

23. Молот массой $m = 1,5$ т ударяет по раскалённой болванке, лежащей на наковальне, и деформирует её. Масса наковальни вместе с болванкой $M = 20$ т. Определить к.п.д. молота при его ударе, считая удар неупругим. Считать работу, совершенную при деформации болванки, полезной.

24. Граната брошена под углом 45° к горизонту со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Через 2 с после момента бросания граната разбивается на два осколка, массы которых откосятся как $1:2$. Меньший осколок в результате взрыва получил дополнительную скорость $v_1 = 50$ м/с, направленную горизонтально вдоль направления бросания гранаты. Определить дальность полета большего осколка, если известно, что меньший осколок упал на расстояние $S_1 = 83$ м.

25. Цепочка массой $m = 1$ кг и длиной $l = 1,4$ м висит на нити, касаясь поверхности стола своим нижним концом. После пережигания нити цепочка упала на стол. Найти полный импульс, который она передала столу.

26. На платформе установлена безоткатная пушка, из которой производится выстрел вдоль железнодорожной платформы под углом 45° к горизонту. Определить начальную скорость снаряда, если известно, что после выстрела платформа откатилась на расстояние 3 м. Масса платформы с пушкой 20 т, масса снаряда 10 кг, коэффициент трения между колесами платформы и рельсами 0,002.

27. На полу стоит тележка в виде длинной доски, снабженной легкими колесами. На одном конце доски стоит человек массой $M = 60$ кг, масса доски $m = 20$ кг. С какой скоростью относительно пола будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль доски со скоростью $v = 1$ м/с? На какое расстояние переместится тележка, если человек перейдет на другой конец доски? Длина доски $l = 2$ м. Массой колес пренебречь.

28. На платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 15$ т. Орудие стреляет вверх под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту в направлении пути. С какой скоростью v_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ кг и он вылетает со скоростью $v_2 = 600$ м/с?

29. Тележка, масса которой $M = 120$ кг, движется по рельсам без трения со скоростью $v = 6$ м/с. С тележки соскакивает человек массой $m = 80$ кг под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению её движения в горизонтальной плоскости. Скорость тележки уменьшается при этом до $v' = 5$ м/с. Какой была скорость U человека во время прыжка относительно земли?

30. Человек массой $m = 70$ кг стоит на корме лодки, находящейся в озере. Длина лодки $l = 5$ м и масса ее $M = 280$ кг. Человек переходит на нос лодки. На какое расстояние человек передвинется относительно воды? Сопротивлением воды пренебречь.

31. Два конькобежца с массами $m_1 = 80$ кг и $m_2 = 50$ кг, держась за концы длинного шнура, неподвижно стоят на льду, шнур натянут. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью $v = 1$ м/с. С какой скоростью будет двигаться каждый из конькобежцев? Трением пренебречь.

32. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно $l = 1$ м. Найти скорость пули, если известно, что стержень с шаром отклонился на угол $\alpha = 10^\circ$.

33. Пуля, летящая горизонтально со скоростью $v = 400$ м/с попадает в брусочек, подвешенный на нити длиной $l = 4$ м, и застревает в нем. Определить угол α , на который отклонится брусочек, если масса пули $m_1 = 20$ г, а бруска $m_2 = 5$ кг.

34. В баллистический маятник массой $M = 5$ кг попала пуля массой $m = 10$ г и застряла в нем. Найти скорость пули v , если маятник, отклонившись от удара, поднялся на высоту $h = 10$ см.

35. Стержень длиной $l = 1,5$ м и массой $M = 10$ кг может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через верхний конец стержня. В середину стержня ударяет пуля массой $m = 10$ г, летящая в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 500$ м/с, и застревает в стержне. На какой угол α отклонится стержень после удара?

36. В покоящийся шар массой $M = 1$ кг, подвешенный на длинном жёстком стержне, попадает пуля массой $m = 10$ г. Угол между направлением полета пули и линией стержня равен $\alpha = 45^\circ$. Удар центральный. После удара пуля застревает в шаре, и шар вместе с пулей, отклонившись, поднимается на высоту $h = 0,12$ м относительно первоначального положения. Найти скорость v пули. Массой стержня пренебречь.

37. Тело массой m_1 ударяется неупруго о покоящееся тело массой m_2 . Найти долю q потерянной при этом кинетической энергии.

38. Во сколько раз уменьшится скорость атома гелия после центрального упругого столкновения с неподвижным атомом водорода, масса которого в 4 раза меньше атома гелия?

39. Протон массой m , летящий со скоростью v_0 , столкнулся с неподвижным атомом массой M . После этого протон стал двигаться в противоположную сторону со скоростью $0,5 v_0$. Найти скорость и энергию атома.

40. При распаде неподвижного ядра образуются три осколка массами m_1 , m_2 и m_3 с общей кинетической энергией E_0 . Найти скорости осколков, если направления скоростей составляют друг с другом углы в 120° .

41. Шар массой m , движущийся со скоростью v , налетает на покоящийся шар массой $m/2$ и после упругого удара продолжает двигаться под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению своего первоначального движения. Найти скорости шаров после столкновения.

42. Два шара А и В с различными неизвестными массами упруго сталкиваются между собой. Шар А до соударения покоился, а шар В двигался со скоростью v_B . После соударения шар В приобрел скорость $0,5 v_B$ и начал двигаться под прямым углом к направлению своего первоначального движения. Определить направление движения шара А и его скорость v_A после столкновения.

43. Шар массой $m_1 = 10$ кг сталкивается с шаром массой $m_2 = 4$ кг. Скорость первого шара $v_1 = 4$ м/с, второго - $v_2 = 12$ м/с. Найти скорость шаров после неупругого удара, если шары движутся навстречу друг другу.

44. Нейтрон массой m_0 ударяется о неподвижное ядро углерода массой $12 m_0$. Считая удар центральным и упругим, найти, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия нейтрона при ударе.

45. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется навстречу второму телу, масса которого $m_2 = 1,5$ кг, и неупруго сталкивается с ним. Скорости тел перед столкновением равны $v_1 = 1$ м/с и $v_2 = 2$ м/с. Сколько времени будут двигаться тела после столкновения, если коэффициент трения равен $k = 0,015$?

46. Частица массы m_1 испытала упругое столкновение с первоначально покоящейся частицей массы m_2 , причем $m_1 > m_2$. Найти максимальный угол, на который может отклониться налетающая частица в результате столкновения.

47. Какую максимальную часть кинетической энергии может передать частица массой $m_1 = 2 \cdot 10^{-22}$ г, сталкиваясь упруго с частицей массой $m_2 = 6 \cdot 10^{-22}$ г, которая до столкновения покоилась?

48. Частица массой $m_1 = 10^{-24}$ г имеет кинетическую энергию $T_1 = 9$ нДж. В результате упругого столкновения с покоящейся частицей массой $m_2 = 4 \cdot 10^{-24}$ г сообщает ей кинетическую энергию $T_2 = 5$ нДж. Определить угол α , на который отклонится частица от своего первоначального направления.

49. В неподвижный атом водорода попадает α - частица, движущаяся со скоростью $v_1 = 2 \cdot 10^6$ м/с. Определить скорости атома водорода и α - частицы после упругого соударения, если α - частица изменила направление своего движения на угол $\varphi = 30^\circ$, а угол между направлениями движения частиц стал равным 100° .

50. Платформа в виде диска радиусом $R = 1,5$ м и массой $M = 180$ кг вращается по инерции около вертикальной оси, делая $n_1 = 10$ об/мин. В центре платформы стоит человек массой $m = 60$ кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

51. Человек стоит в центре скамьи Жуковского и вместе с ней вращается по инерции. Частота вращения $n_1 = 0,5$ об/с. Момент инерции человека относительно оси вращения $J = 1,6$ кг·м². В вытянутых руках человек держит две гири массой $m = 2$ кг каждая. Расстояние между гирями $l = 1,6$ м. Сколько оборотов в секунду будет делать скамейка с человеком, если он опустит гири и расстояние между ними станет равным $0,4$ м? Моментом инерции скамейки пренебречь.

52. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска, стоит человек массой $m = 80$ кг. Масса платформы $M = 200$ кг, её радиус $R = 2$ м. Найти, с какой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью $v = 2$ м/с относительно платформы.

53. На краю платформы, имеющей форму диска, находится человек. На какой угол повернется платформа, если человек, обойдя платформу, вернется в исходную точку? Масса платформы $M = 100$ кг, масса человека $m = 60$ кг. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

54. Платформа в виде диска радиусом $R = 1$ м вращается по инерции со скоростью $n_1 = 6$ об/мин. На краю платформы стоит человек, масса которого $m = 80$ кг. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции платформы $J = 120$ кг·м², момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

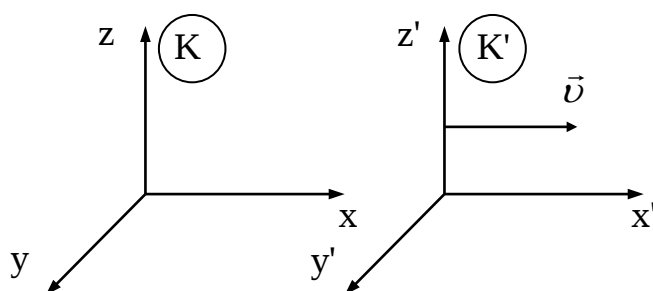
55. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска, стоит человек, масса которого $m = 60$ кг. Масса платформы $M = 200$ кг, её радиус $R = 2$ м. Определить угловую скорость вращения платформы, если человек будет по ней идти со скоростью $v = 1$ м/с вдоль её края.

56. Во сколько раз увеличится кинетическая энергия платформы с человеком, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $J_1 = 2,94$ кг·м² до $J_2 = 0,80$ кг·м²? Масса платформы $M = 80$ кг, радиус $R = 2$ м. Первоначальная частота вращения составляла $\nu_1 = 20$ об/мин.

57. Какую работу совершит человек, если он от края платформы перейдет в ее центр? Масса платформы $M = 100$ кг, масса человека $m = 60$ кг, первоначальная частота вращения $\nu_1 = 10$ об/мин.

1.2.2. Элементы специальности теории относительности Основные формулы и понятия

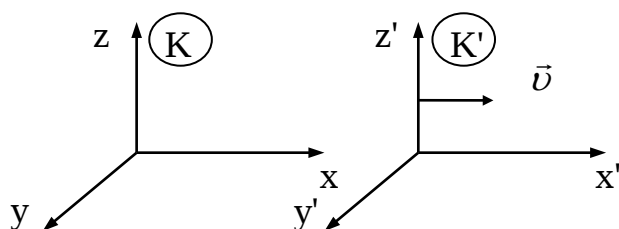
1. Преобразования координат и времени Лоренца-Эйнштейна:



$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\t' &= \frac{t - \frac{v}{c}x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\y' &= y, \quad z' = z,\end{aligned}$$

где x', y', z' , и t' - координаты и время точки в системе K' , относительно которой точка покоится, а x, y, z и t - координаты и время точки M в системе K , относительно которой точка движется со скоростью v .

2. Релятивистский закон сложения скоростей:



$$U = \frac{U' + v}{1 + \frac{U'v}{c^2}},$$

где U' - скорость точки относительно системы K' , движущейся по отношению к неподвижной системе K со скоростью v , а U - скорость точки относительно системы K .

3. Длина тела l , движущегося со скоростью v в направлении оси OX , связана с собственной длиной l_0 (длиной в системе отсчёта, по отношению к которой тело покоится), соотношением:

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

4. Промежуток времени Δt между событиями, происходящими в системе, движущейся со скоростью v , связан с собственным временем Δt_0 (временем в системе отсчета, по отношению к которой часы неподвижны) соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

5. Зависимость массы частицы от ее скорости

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 - масса покоя, c - скорость света в вакууме.

6. Закон взаимосвязи массы с энергией

$$E = mc^2$$

7. Кинетическая энергия частицы, движущейся со скоростью v , сравнимой со скоростью света c

$$T = E - E_0 = c^2(m - m_0),$$

где E - полная энергия частицы, E_0 - энергия покоя.

8. Импульс тела в релятивистском случае движения

$$\vec{p} = m\vec{v} = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \vec{v}.$$

9. Связь между полной энергией E тела и его импульсом p

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Определить импульс электрона с кинетической энергией 5 МэВ.

Решение

Используя формулу, выражающую связь между энергией частицы и ее импульсом, можно написать:

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2.$$

Отсюда импульс частицы равен:

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2} = \frac{1}{c} \sqrt{(E - E_0)(E + E_0)},$$

$E - E_0 = T$, а $E + E_0 = T + 2E_0$ (в последнем равенстве легко убедиться, если к левой части прибавить и отнять E_0). Поэтому для импульса частицы имеем

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2E_0)},$$

где E_0 – энергия покоя электрона, равная $E_0 = m_0 c^2, (m_0 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг})$.

После подстановки численных значений получим:

$$p = 2,93 \cdot 10^{-21} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Задача 2. π - мезон, нестабильная частица, имеющая в системе, связанной с этой частицей, среднее время жизни $\Delta t_0 = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ с}$. Пучок π - мезонов можно получить в синхроциклотроне в результате столкновений протонов с мишенью. При этом скорость частиц в пучке равна $v = 0,6$ скорости света в вакууме. Определить среднее время жизни π - мезонов и путь, пройденный частицами за это время относительно земли.

Решение

Время жизни мезонов по часам, связанным с землей, и собственное время жизни π - мезона связаны соотношением

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отсюда

$$\Delta t = \frac{1,8 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1 - (0,6c)^2/c^2}} = 2,25 \cdot 10^{-8} \text{ с}.$$

Путь, пройденный за это время π - мезоном относительно земли, равен:

$$l = v \cdot \Delta t = 0,6c \Delta t,$$

$$l = 4,05 \text{ м}.$$

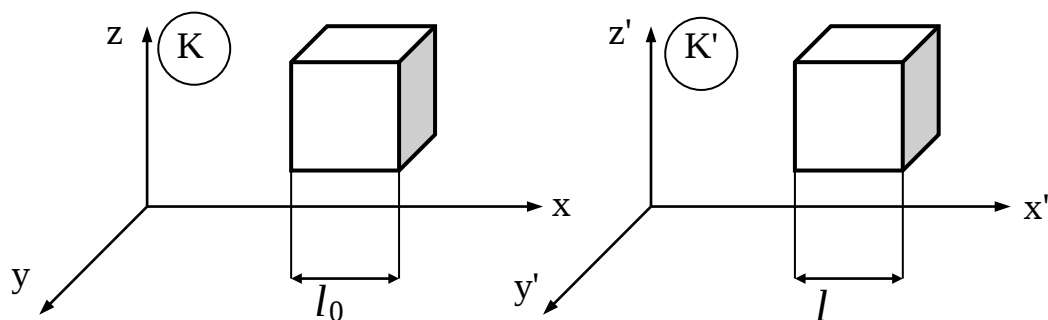
Задача 3. Плотность материала куба в неподвижной системе координат ρ . Тело имеет форму куба, ребра которого параллельны координатным осям. Определить плотность тела в инерциальной системе координат, движущейся относительно неподвижной со скоростью v вдоль оси ОХ. Во сколько раз увеличится плотность тела, движущегося в неподвижной системе координат со скоростью $v = 0,5 c$? Показать, что при небольшой скорости v плотность тела остаётся постоянной величиной.

Решение

В неподвижной системе координат K плотность тела определяется формулой

$$\rho = m_0 / V_0 = m_0 / l_0^3, \quad (1)$$

где m_0 - масса покоя куба, l_0 – длина его ребра.



В системе координат K' , движущейся относительно неподвижной системы K со скоростью v , плотность тела определяется формулой

$$\rho' = m / V, \quad (2)$$

где $V = l_0^3$ - объем тела в системе координат K' . Здесь нужно учесть, как масса и продольные размеры тела зависят от скорости движения, а именно:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

$$V = l_0^2 \cdot l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = l_0^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Подставим эти величины во второе уравнение:

$$\rho' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} / l_0^3 \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0}{l_0^3 (1 - v^2/c^2)} = \rho / (1 - v^2/c^2)$$

и найдём отношение плотностей:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{(1 - v^2/c^2)}.$$

Так как система K' движется относительно K со скоростью $v = 0,5c$, то

$$\frac{\rho'}{\rho} = 1 / \left(1 - \frac{(0,5c)^2}{c^2} \right) = 1,33.$$

При $v \ll c$ $\rho' = \rho$, т.е. при малых скоростях движения плотность тела не зависит от скорости.

Задача 4. Частица с массой покоя m_0 , движущаяся со скоростью $v_1 = 0,8$ скорости света, испытывает неупругое соударение с покоящейся частицей такой же массы. Определить скорость и массу образовавшейся частицы.

Решение

После неупругого удара обе частицы сливаются в одну и движутся с одинаковой скоростью v . По закону сохранения импульса в проекции на ось, совпадающую с направлением движения частиц, можно написать уравнение

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v,$$

где v_1 - скорость первой частицы до удара, $v_2 = 0$. Масса первой частицы m_1 , зависит от скорости:

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

Обозначим массу образовавшейся частицы через M . С одной стороны, $M = m_1 + m_2$, с другой стороны, M зависит от скорости по закону

$$M = 2m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Подставим эти формулы в первое уравнение:

$$\frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{2m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Отсюда найдем неизвестную скорость движения образовавшейся частицы v :

$$v = 0,5 c,$$

где c -скорость света в вакууме. Теперь можно найти и её массу:

$$M = \frac{2m_0}{\sqrt{1 - (0,5c)^2/c^2}} = 2,4 m_0.$$

Задачи, рекомендуемые для решения на аудиторных занятиях

1. При какой скорости кинетическая энергия любой частицы равна её энергии покоя?

Ответ: $v = 2,6 \cdot 10^8$ м/с.

2. Определить скорость электронов, достигающих анода в двухэлектродной лампе с разностью потенциалов между анодом и катодом 300 В, и скорость электронов, получивших в ускорителе энергию 30 КэВ.

Ответ: $v_1 = 10^7$ м/с, $v_2 = 0,33 c$.

3. Найти собственную длину стержня, если в неподвижной системе отсчета его скорость $v = c / 2$, длина $l = 1$ м и угол между ним и направлением движения $\alpha = 45^\circ$.

$$\text{Ответ: } l_0 = l \sqrt{\frac{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1,08 \text{ м.}$$

4. Мю-мезон, движущийся со скоростью $v = 0,99c$, пролетел от места своего рождения до точки распада $l = 3$ км. Определить собственное время жизни этого мезона и расстояние, которое пролетел мю-мезон с "его точки зрения".

Ответ: $\tau_0 = 1,4$ мкс, $L = 420$ м .

5. Вычислить импульс протона в МэВ/с, где c - скорость света, если известно, что его кинетическая энергия $T = 500$ МэВ.

Ответ: $p = 1091$ МэВ/с.

6. Какую скорость необходимо сообщить телу, чтобы его плотность возросла на 10%?

Ответ: $v = 0,3 c$.

7. Две частицы движутся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 0,5 c$ и $v_2 = 0,75 c$. Найти их относительную скорость.

Ответ: $v = 0,91 c$.

8. С какой скоростью должна двигаться частица, чтобы её масса была в 3 раза больше массы покоя?

Ответ: $v = 283$ Мм/с.

9. Кинетическая энергия электрона $T = 10$ МэВ. Во сколько раз его масса больше массы покоя?

Ответ: в 20,6 раза .

10. Найти скорость мезона, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.

Ответ: $v = 2,985 \cdot 10^8$ м/с.

11. Чему равно релятивистское сокращение размеров протона в процентах, кинетическая энергия которого равна 10^4 МэВ.

Ответ: 91,5%.

12. Какому изменению массы соответствует изменение энергии на одну калорию?

Ответ: $\Delta m = 4,6 \cdot 10^{-17}$ кг.

Домашнее задание

1. Найти относительную скорость движения двух частиц, движущихся навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 0,6 c$ и $v_2 = 0,9 c$.

2. Какую скорость необходимо сообщить телу, чтобы его плотность возросла в 1,5 раза?

3. С какой скоростью должна двигаться частица, чтобы её масса была бы в 5 раз больше массы покоя?

4. Кинетическая энергия протона 10 МэВ. Во сколько раз его масса больше массы покоя?

5. Найти скорость мезона, если его полная энергия в 10 раз больше энергии покоя.
6. Чему равно релятивистское сокращение размеров протона в процентах, кинетическая энергия которого равна 10^5 МэВ?
7. Солнце ежеминутно испускает энергию, равную $6,5 \cdot 10^{21}$ кВт-час. Считая излучение Солнца постоянным, найти, за какое время масса солнца уменьшится в 2 раза.
8. Определить импульс и кинетическую энергию протона, движущегося со скоростью $v = 0,9 c$.
9. Два ускорителя выбрасывают частицы навстречу друг другу со скоростями $0,9 c$. Определить относительную скорость сближения частиц с точки зрения наблюдателя, движущегося с одной из частиц.
10. Частица движется со скоростью $v = 0,5 c$. Во сколько раз масса частицы больше массы покоя?
11. С какой скоростью движется частица, если её масса в 4 раза больше массы покоя?
12. Во сколько раз масса протона больше массы электрона, если обе частицы имеют одинаковую кинетическую энергию, равную 1 ГэВ?
13. Определить кинетическую энергию в МэВ для электрона, летящего со скоростью $0,8 c$.
14. При какой скорости кинетическая энергия электрона равна 4 МэВ?
15. Кинетическая энергия протона $T = 10$ МэВ. Определить его импульс.
16. При какой скорости движения релятивистское сокращение длины движущегося тела составляет 25 %?
17. Какую скорость должно иметь тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?
18. Мезон движется со скоростью $0,95 c$. Какой промежуток времени по часам наблюдателя соответствует одной секунде "собственного" времени мезона?
19. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его продольные размеры стали меньше в 2 раза?
20. Найти скорость мезона, если его полная масса в 10 раз больше массы покоя.
21. Найти релятивистское сокращение размеров протона, кинетическая энергия которого 10 ГэВ.
22. Найти изменение энергии электрона, если изменение его массы составляет $\Delta m = m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.
23. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой покоя m_0 от $0,6 c$ до $0,8 c$?
24. Показать, что для частицы величина $E^2 = p^2 c^2$ есть инвариант. Каково значение этого инварианта?
25. При какой скорости движения полная энергия частицы равна энергии покоя?

Варианты индивидуального задания

варианта	Тема 1		Тема 2
1.	1,26,51	19,44,12	1,12,14
2.	2,27,52	20,45,13	2,10,15
3.	3,28,53	21,46,14	3,24,16
4.	4,29,54	22,47,15	4,9,17
5.	5,30,55	23,48,1	5,13,18
6.	6,31,56	24,49,17	6,14,19
7.	1,8,33	19,26,50	8,16,23
8.	7,32,51	25,2,18	7,15,20
9.	2,9,34	20,27,52	1,13,22
10.	3,10,35	21,28,53	2,15,23
11.	4,11,36	22,29,54	3,14,24
12.	12,37,5	30,55,28	2,13,25
13.	13,38,6	24,31,56	5,12,25
14.	7,14,39	25,32,57	6,11,24
15.	15,40,8	26,33,51	7,10,23
16.	9,16,41	34,27,52	8,24,10
17.	17,42,10	28,35,53	1,11,23
18.	11,18,43	36,29,50	2,12,22
19.	19,12,44	5,30,57	3,21,20
20.	20,45,53	31,6,38	4,20,14
21.	21,56,14	7,39,32	5,19,15
22.	22,47,55	8,40,33	18,6,25
23.	48,23,56	9,41,34	7,17,24
24.	24,49,17	10,52,35	8,16,23
25	25,50,18	1,43,36	9,15,22

ГЛАВА 2. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

Основные формулы и понятия

1. Уравнение состояния идеального газа:

$$PV = \frac{M}{\mu} RT,$$

где P - давление газа, V - занимаемый им объем, M - масса газа, μ - молярная масса, T - температура, $R = 8,31$ Дж/(моль·К) - универсальная газовая постоянная.

2. Закон Дальтона. Если в сосуде находится смесь нескольких газов, не вступающих друг с другом в химические реакции, то давление смеси газов равно сумме их парциальных давлений.

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n.$$

3. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа:

$$P = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon \rangle,$$

где n - концентрация молекул газа, $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} kT$ - средняя кинетическая энергия одной молекулы. Или

$$P = nkT,$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К - постоянная Больцмана.

4. Функция распределения молекул газа по модулям скоростей (распределение Максвелла)

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2,$$

где m - масса одной молекулы, v - скорость молекулы.

Статистический смысл функции распределения:

$f(v) = dN / Nd v$ - относительное число молекул, скорости которых лежат в единичном интервале скоростей, включающем данную скорость v (плотность вероятности того, что молекула обладает данной скоростью v).

5. Скорости молекул:

а) наиболее вероятная $v_g = \sqrt{2kT/m},$

б) средняя $\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m},$

в) средняя квадратичная $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{3kT/m}.$

6. Барометрическая формула Лапласа (при условии, что температура газа и ускорение свободного падения не зависят от высоты):

$$P = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}},$$

где P_0 - давление на высоте $h = 0$, m - масса одной молекулы.

7. Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n},$$

где d - эффективный диаметр молекулы.

8. Уравнения переноса.

А. Уравнение диффузии:

$$dM = -D \frac{d\rho}{dx} dS_{\perp} dt,$$

где dM - переносимая масса, $D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle$ - коэффициент диффузии, $d\rho / dx$ - градиент плотности газа, $dS_{\perp}$ - площадка, через которую происходит перенос, расположенная перпендикулярно оси x , dt - время переноса.

Б. Уравнение внутреннего трения:

$$dP = -\eta \frac{dv}{dx} dS_{\perp} dt,$$

или $F = \eta \frac{dv}{dx} S_{\perp}$, где dP - переносимый импульс, $\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho$ - коэффициент вязкости, dv / dx - градиент скорости направленного движения слоев газа, F - сила внутреннего трения.

В. Уравнение теплопроводности:

$$dQ = -\chi \frac{dT}{dx} dS_{\perp} dt,$$

где dQ - переносимое количество тепла, $\chi = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho c_V$ - коэффициент теплопроводности, c_V - удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, dT / dx - градиент температуры.

Примеры решения задач

Задача 1. В сосуде объемом $V = 0,5$ л находится масса $M = 1$ г пароводородного йода (J_2). При температуре $t = 1000^\circ\text{C}$ давление в сосуде $p = 93,3$ кПа. Найти степень диссоциации α молекул йода на атомы. Молярная масса йода $\mu = 0,254$ кг/моль.

Решение

При данных условиях газ, находящийся в сосуде, можно представить как смесь двух газов: газа, состоящего из диссоциировавших распавшихся

на атомы молекул йода (масса этого газа $M_1 = \alpha M$, молярная масса $\mu_1 = \mu/2$), и газа, состоящего из нераспавшихся двухатомных молекул J_2 . Масса этого газа $M_2 = (1 - \alpha)M$, молярная масса $\mu_2 = \mu$.

Для смеси газов в сосуде справедлив закон Дальтона:

$$P = P_1 + P_2, \quad (1)$$

причем парциальные давления газов, входящих в смесь, можно найти, используя уравнение состояния идеального газа:

$$P_1 V = \frac{M_1}{\mu_1} RT; \quad P_2 V = \frac{M_2}{\mu_2} RT.$$

Сложим левые и правые части этих уравнений:

$$(P_1 + P_2)V = \left(\frac{M_1}{\mu_1} + \frac{M_2}{\mu_2} \right) RT.$$

Тогда в соответствии с формулой (1) получим

$$PV = \left(\frac{2\alpha M}{\mu} + \frac{(1 - \alpha)M}{\mu} \right) RT,$$

откуда после простых алгебраических преобразований найдем

$$\alpha = \frac{PV}{\frac{M}{\mu} RT} - 1. \quad (2)$$

Подставив в (2) данные задачи (в системе СИ), получим численный результат:

$$\alpha = 0,12.$$

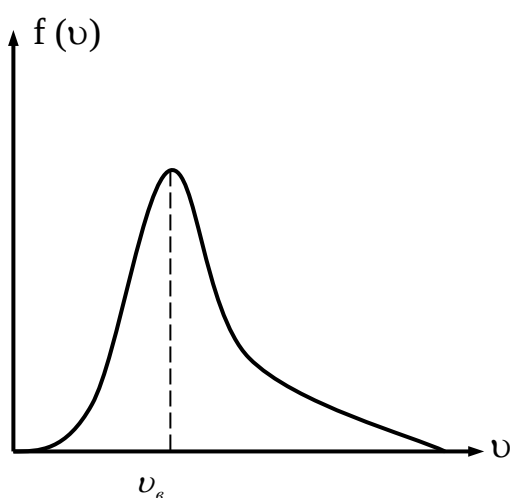


Рис. 2.1

Задача 2. Азот находится под давлением $P = 10^5$ Па при температуре $T = 300$ К. Найти относительное число молекул азота, скорости которых лежат в интервале от v до $v + \Delta v$, где $\Delta v = 1$ м/с, v - средняя скорость молекул.

Решение

При заданных в условии давлении и температуре азот можно считать идеальным газом. В отсутствие внешних сил молекулы идеального газа подчиняются закону распределения Максвелла:

$$f(v) = \frac{dN}{Ndv} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2,$$

откуда dN/N - относительное число молекул, модуль скорости которых лежит в интервале от v до $v + \Delta v$:

$$\frac{dN}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v^2 dv. \quad (1)$$

Это выражение справедливо, если интервал скоростей dv столь мал, что изменением функции распределения на этом интервале скоростей можно пренебречь. В данном случае интервал $\Delta v = 1$ м/с мал по сравнению со значением средней скорости $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 475$ м/с. Кроме того, функция распределения $f(v)$ в области средней скорости $\langle v \rangle$ изменяется слабо (см. рис. 2.1). Поэтому искомое относительное число молекул $\Delta N/N$ можно найти по формуле (1), где $dv \approx \Delta v$ и $v = \langle v \rangle = \sqrt{8kT/\pi m}$:

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m8kT}{2kT\pi m}} \frac{8kT}{\pi m} \Delta v.$$

После необходимых сокращений получим

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{m}{\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{4}{\pi}} \Delta v.$$

Наконец, подставив в последнее выражение данные задачи и учитывая, что $\frac{m}{k} = \frac{R}{\mu}$, где $\mu = 0,028$ кг/моль - молярная масса азота,

получим: $\frac{\Delta N}{N} = 0,0019$.

Задача 3. Найти для идеального газа скорость молекул, при которой значение функции распределения Максвелла для температуры T_0 будет таким же, как и для температуры в η раз большей.

Решение

Изобразим графически функции распределения Максвелла при темпе-

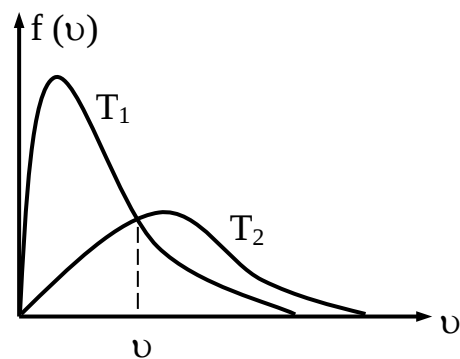


Рис. 2.2

ратурах $T_1=T_0$ и $T_2=\eta T_0$ (см. рис.2.2). Очевидно, искомой скорости v соответствует точка пересечения этих кривых, в которой, согласно условию,

$$f(v)_{T_1} = f(v)_{T_2}.$$

Используем теперь математическое выражение функции распределения Максвелла:

$$4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT_1}} v^2 = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT_2}} v^2.$$

Подставим в последнее равенство $T_1=T_0$; $T_2=\eta T_0$ и после сокращений получим:

$$\left(\frac{1}{T_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT_0}} = \left(\frac{1}{\eta T_0} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k\eta T_0}},$$

или

$$e^{-\frac{mv^2}{2kT_0}} \eta^{3/2} = e^{-\frac{mv^2}{2k\eta T_0}}.$$

Прологарифмируем последнее равенство:

$$-\frac{mv^2}{2kT_0} + \frac{3}{2} \ln \eta = -\frac{mv^2}{2k\eta T_0}.$$

После алгебраических преобразований найдем искомую скорость

$$v = \sqrt{\frac{3kT_0}{m} \frac{\eta \ln \eta}{(\eta - 1)}}.$$

Задача 4. Установленная вертикально и закрытая с обоих концов труба наполнена газообразным кислородом ($\mu = 0,032$ кг/моль). Высота трубы $h = 200$ м, объем $V = 200$ л. Стенки трубы имеют всюду одинаковую температуру $T = 293$ К. Давление газа внутри трубы вблизи ее основания равно $P_0 = 10^5$ Па. Определить:

- давление P в трубе вблизи ее верхнего конца;
- количество N молекул кислорода, содержащихся в трубе.

Решение

а) Поскольку газ в трубе находится в поле силы тяжести, причем температура его, по условию, постоянна, а ускорение силы тяжести также можно считать неизменным, то для нахождения давления на определенной высоте применим барометрическую формулу:

$$P = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = P_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}.$$

Тогда давление в трубе вблизи ее верхнего конца легко подсчитать:

$$P = 0,97 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

б) Поскольку концентрация молекул в трубе с ростом высоты уменьшается, то для нахождения полного числа молекул в трубе N найдем вначале число молекул dN в пределах тонкого слоя газа толщиной dx , находящегося на высоте x (рис. 2.3). Ввиду малости dx концентрацию молекул в пределах этого слоя можно считать постоянной, тогда $dN = n dV$.

Здесь $n = P / kT$ (из основного уравнения молекулярно-кинетической теории),

$$dV = S dx \quad (S = V / h).$$

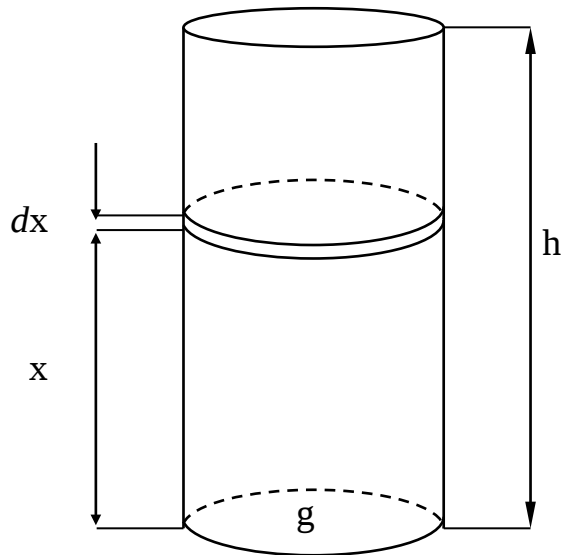


Рис. 2.3

Давление P на высоте x найдём по барометрической формуле:

$$dN = \frac{P_0}{kT} e^{-\frac{\mu g x}{RT}} \frac{V}{h} dx.$$

Полное число молекул в трубе найдем интегрированием:

$$N = \int dN = \frac{P_0 V}{kT h} \int_0^h e^{-\frac{\mu g x}{RT}} dx = \frac{P_0 V}{kT h} \left(-\frac{RT}{\mu g} \right) e^{-\frac{\mu g x}{RT}} \Bigg|_0^h = \frac{P_0 V N_0}{\mu g h} \left(1 - e^{-\frac{\mu g h}{RT}} \right).$$

Подставив в последнее выражение численные значения, получим

$$N = 4,88 \cdot 10^{24}$$

Отметим, что поскольку давление (как видно из первой части задачи), а значит, и концентрация газа слабо изменяются в пределах высоты трубы, то можно полное число молекул N сосчитать приближенно $N \approx nV$,

где $n \approx P_0 / kT$ примем постоянной. Тогда $N \approx \frac{P_0 V}{kT}$ или численно

$$N \approx 4,94 \cdot 10^{24}.$$

Как видим, действительно, погрешность такого приближенного нахождения N при данных условиях не превышает 1,5 %.

Задача 5. Два горизонтальных диска радиусом $R = 20$ см расположены друг над другом так, что их оси совпадают. Расстояние между плоскостями дисков $d = 0,5$ см. Верхний диск неподвижен, нижний - вращается с частотой обращения $\nu = 10$ с⁻¹. Найти вращающий момент, действующий на верхний диск. Воздух находится при нормальных условиях.

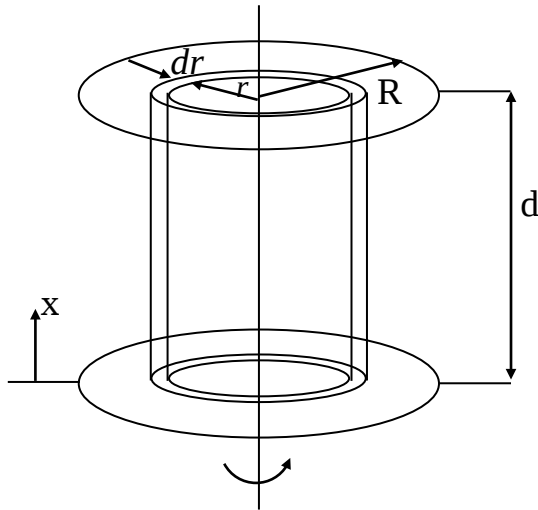


Рис. 2.4

Решение

Причиной того, что на верхний неподвижный диск действует некоторый вращающий момент, является внутреннее трение между слоями воздуха. Эти слои движутся с разными скоростями. Слой, прилегающий к нижнему диску, имеет наибольшую скорость, верхний же слой практически неподвижен. Скорость промежуточных слоев можно считать линейно убывающей с ростом расстояния x от нижнего диска, т.к. линейная скорость любой точки диска значительно меньше средней скорости движения молекул.

Расчет сил внутреннего трения в данном случае осложняется тем, что при вращательном движении слоев линейные скорости точек, находящихся на разных расстояниях r от оси вращения, различны. Для расчета разобьем воздух между дисками на цилиндрические слои радиусом r и толщиной dr (рис. 2.4). Тогда элементарная сила dF , действующая вследствие внутреннего трения на верхний диск:

$$dF = \eta \frac{\Delta v}{\Delta x} dS; \quad (dS = 2\pi r dr).$$

В этом случае градиент скорости $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ при расстоянии d между дисками можно записать как $\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v}{d} = \frac{\omega \cdot r}{d} = \frac{2\pi v \cdot r}{d}$.

Тогда

$$dF = \eta \frac{2\pi v \cdot r}{d} 2\pi r dr.$$

Эта сила создает вращающий момент:

$$dM = dF \cdot r = \eta \frac{4\pi^2 v}{d} r^3 dr.$$

Полный вращающий момент найдем интегрированием:

$$M = \int dM = \eta \frac{4\pi^2 v}{d} \int_0^R r^3 dr = \eta \frac{\pi^2 v R^4}{d}.$$

Найдем коэффициент вязкости воздуха при нормальных условиях:

$$\eta = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle \lambda \rangle \rho,$$

$$\text{где } \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}, \quad \langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad n = \frac{P}{kT}, \quad \rho = \frac{P\mu}{RT}.$$

Тогда:

$$\eta = \frac{2}{3N_0 d} \sqrt{\frac{RT\mu}{\pi^2}}.$$

Считая воздух идеальным газом, у которого молярная масса $\mu = 0,029$ кг/моль, эффективный диаметр молекул $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м, найдем при $T = 273$ К, что $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с).

Теперь вычислим вращающийся момент, действующий на верхний диск:

$$M = 5,68 \cdot 10^{-4} \text{ Н·м.}$$

Задачи, рекомендуемые для решения в аудитории

1. В сосуде находится количество $\nu_1 = 10^{-7}$ моль кислорода и масса $M_2 = 10^{-6}$ г азота. Температура смеси $t = 100^\circ \text{C}$, давление в сосуде $P = 133$ мПа. Найти объем сосуда, парциальные давления P_1 и P_2 кислорода и азота и число молекул n в единице объема сосуда.

Ответ: $V = 3,2$ л; $P_1 = 98$ мПа; $P_2 = 35$ мПа; $n = 2,6 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

2. Сколько молекул N ударяется за 1 с об 1 м^2 стенки сосуда, в котором находится азот при давлении 1013 Па и температуре 20°C ?

Ответ: $N = 6,2 \cdot 10^{23} \text{ с}^{-1} \text{ м}^{-2}$.

3. Какая часть молекул газа имеет кинетическую энергию, достаточную для преодоления гравитационного поля Земли, если температура газа $T = 300$ К? Расчет сделать для молекул водорода.

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} 100\% \sim 10^{-19} \%$.

4. Найти для газообразного азота температуру, при которой скоростям молекул $v_1 = 300$ м/с и $v_2 = 600$ м/с соответствуют одинаковые значения функции распределения Максвелла.

Ответ: $T = 328$ К.

5. В сосуде объемом $V = 30$ л находится $M = 100$ г кислорода под давлением $P = 3 \cdot 10^5$ Па. Определить наиболее вероятное значение кинетической энергии молекулы кислорода.

Ответ: $\varepsilon_{\text{вер.}} = 4,8 \cdot 10^{-21}$ Дж.

6. Полагая температуру воздуха и ускорение свободного падения не зависящими от высоты, определить, на какой высоте h над уровнем моря плотность воздуха меньше своего значения на уровне моря в 2 раза. Температура воздуха 0°C .

Ответ: $h = 5,5 \text{ км}$.

7. Температура газа изменяется с высотой h по закону $T = T_0(1 - \beta h)$, где β - постоянная величина. Найти закон изменения с высотой давления P газа. При $h = 0$ давление газа P_0 . Масса моля газа μ .

Ответ: $P = P_0(1 - \beta h)$.

8. Самолет летит со скоростью $v = 300 \text{ км/ч}$. Считая, что слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости, $d = 4 \text{ см}$, найти касательную силу, действующую на единицу поверхности крыла. Диаметр молекул воздуха $d = 0,3 \text{ нм}$. Температура воздуха $t = 0^\circ\text{C}$.

Ответ: $F = 45 \text{ мН/м}^2$.

9. Расстояние между стенками сосуда Дьюара $a = 8 \text{ мм}$. При каком давлении p теплопроводность воздуха, находящегося между стенками сосуда, начнет уменьшаться при откачке? Температура воздуха $t = 17^\circ\text{C}$. Диаметр молекулы воздуха $d = 0,3 \text{ нм}$.

Ответ: $p = 1,26 \text{ Па}$.

Домашнее задание

1. В сосуде находится углекислый газ. При некоторой температуре степень диссоциации молекул углекислого газа на кислород и окись углерода $\alpha = 0,25$. Во сколько раз давление в сосуде при этих условиях будет больше того давления, которое имело бы место, если бы молекулы углекислого газа не были диссоциированы?

2. Какое число частиц n находится в единице массы парообразного йода (J_2), степень диссоциации которого $\alpha = 0,5$? Молярная масса молекулярного йода $\mu = 0,254 \text{ кг/моль}$.

3. Какое число частиц N находится в массе $M = 16 \text{ г}$ кислорода, степень диссоциации которого $\alpha = 0,5$?

4. В запаянном сосуде находится вода, занимающая объем, равный половине объема сосуда. Найти давление P и плотность ρ водяного пара при температуре $t = 400^\circ\text{C}$, считая, что при этой температуре вся вода обращается в пар.

5. Посредине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длиной $L = 1 \text{ м}$ находится столбик ртути высотой $h = 10 \text{ см}$. Если трубку поставить вертикально, то столбик ртути сместится на $l = 10 \text{ см}$. До какого давления была откачана трубка?

6. Стеклянная трубка длиной $L = 125$ см расположена вертикально запаянным концом вниз. Доходящий до открытого верхнего края трубки столбик ртути высотой $h = 60$ см отделяет находящийся в ней воздух от атмосферы. Трубку осторожно переворачивают открытым концом вниз, при этом часть ртути выливается. Найти высоту X оставшегося в трубке столбика ртути, если атмосферное давление $P = 10^5$ Па.

7. В колбе емкостью $V = 100$ см³ содержится некоторый газ при температуре $T = 300$ К. На сколько понизится давление газа в колбе, если вследствие утечки из колбы выйдет $N = 10^{20}$ молекул.

8. Сосуд наполнен аргоном. Температура газа равна 0°C . Сосуд вначале движется со скоростью $v = 100$ м/с, затем внезапно останавливается. Пренебрегая теплообменом между газом и стенками сосуда, определить температуру T газа после остановки сосуда.

9. В сферическом сосуде с внутренним радиусом $r = 5$ см содержится водород при температуре $T = 300$ К и давлении $P = 10^5$ Па. Сколько молекул N ударяется о стенки сосуда за 1 с?

10. Средняя энергия молекул идеального одноатомного газа $\langle \epsilon \rangle = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж. Давление газа $P = 2 \cdot 10^5$ Па. Найти число молекул газа в единице объема n .

11. Для получения хорошего вакуума в стеклянном сосуде необходимо прогревать стенки сосуда при откачке, чтобы удалить адсорбированный газ. Вычислить, на сколько может повыситься давление в сферическом сосуде радиусом $r = 10$ см, если адсорбированные молекулы перейдут со стенок в сосуд. Площадь поперечного сечения молекулы считать равной 10^{-19} м², слой мономолекулярный. Температура $t = 300$ °C.

12. Плотность некоторого газа равна $6 \cdot 10^{-2}$ кг/м³, средняя квадратичная скорость молекул этого газа равна 500 м/с. Найти давление, которое газ оказывает на стенки сосуда.

13. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях равна 461 м/с. Какое количество молекул содержится в единице массы этого газа?

14. Вычислить наиболее вероятную, среднюю и среднюю квадратичную скорости молекул газа, у которого при нормальном атмосферном давлении плотность $\rho = 1$ г/л.

15. При какой температуре газа, состоящего из смеси азота и кислорода, наиболее вероятные скорости молекул азота и кислорода будут отличаться друг от друга на $\Delta v = 30$ м/с?

16. Смесь водорода и гелия находится при температуре $T = 300$ К. При каком значении скорости v молекул значения максвелловской функции распределения по скоростям будут одинаковыми для обоих газов?

17. Определить температуру водорода, при которой средняя квадратичная скорость молекул больше их наиболее вероятной скорости на $\Delta v = 400$ м/с.

18. Определить температуру кислорода, для которой функция распределения молекул по скоростям будет иметь максимум при скорости $v = 420$ м/с.

19. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более чем на 1 % от значения наиболее вероятной скорости.

20. Найти относительное число молекул газа, скорости которых отличаются не более чем на 1 % от значения средней квадратичной скорости.

21. Пассажирский самолет совершает полеты на высоте $h_1 = 8300$ м. Чтобы не снабжать пассажиров кислородными масками, в кабине при помощи компрессора поддерживается постоянное давление, соответствующее высоте $h_2 = 2700$ м. Найти разность Δp давлений внутри и снаружи кабины. Температуру наружного воздуха считать равной $t = 0$ °С.

22. Какое предельное число n молекул газа должно находиться в единице объема сферического сосуда, чтобы молекулы не сталкивались друг с другом? Диаметр молекул газа $d = 0,3$ нм, диаметр сосуда $D = 15$ см.

23. Во сколько раз коэффициент внутреннего трения кислорода больше коэффициента внутреннего трения азота? Температура газов одинакова.

24. Можно ли считать вакуум с давлением $P = 100$ мкПа высоким, если он создан в колбе диаметром $D = 20$ см, содержащей азот при температуре $T = 280$ К?

25. Найти среднюю длину свободного пробега $\langle \lambda \rangle$ и время между двумя соударениями $\langle \tau \rangle$ для:

а) молекул водорода при нормальных условиях;

б) протонов космических лучей в Галактике.

Считать, что средняя плотность межзвездного газа $n \approx 10$ частиц/м³. Скорость космических частиц близка к скорости света. Масса протона приблизительно равна массе атома водорода. Радиус протона $r \approx 10^{-15}$ м.

2.2. Основы термодинамики Основные формулы и понятия

1. Первое начало термодинамики. Количество теплоты δQ , сообщенное термодинамической системе, идёт на увеличение ее внутренней энергии dU и на совершение системой работы dA над окружающими телами, т.е.

$$\delta Q = dU + dA.$$

Простейшей термодинамической системой является идеальный газ.

2. Внутренняя энергия идеального газа

$$U = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} RT,$$

где M - масса газа, μ - молярная масса, i - число степеней свободы молекулы, T - температура, R - универсальная газовая постоянная.

3. Молярная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимым для нагревания одного моля вещества на один Кельвин:

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT},$$

где $\nu = \frac{M}{\mu}$ - число молей.

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном объеме

$$C_V = \frac{i}{2} R.$$

Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении

$$C_P = C_V + R = \frac{i+2}{2} R.$$

4. Удельная теплоемкость измеряется количеством теплоты, необходимым для нагревания единицы массы вещества на один Кельвин:

$$C = \frac{1}{M} \frac{\delta Q}{dT}.$$

5. Работа, совершаемая газом, при изменении его объема

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV.$$

Работа газа при изобарическом процессе

$$A = P(V_2 - V_1).$$

Работа газа при изотермическом процессе

$$A = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

6. При адиабатическом процессе давление газа, его объем и температура связаны уравнениями Пуассона:

$$PV^\gamma = \text{const}; \quad TV^{\gamma-1} = \text{const}; \quad TP^{1-\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = C_P / C_V$ - отношение молярных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме.

Работа идеального газа при адиабатическом процессе выражается следующими формулами:

$$A = -\Delta U = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R(T_1 - T_2),$$

$$A = \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

$$A = \frac{M}{\mu} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right),$$

$$A = \frac{P_1 V_1 (T_1 - T_2)}{(\gamma - 1) T_1}.$$

7. Коэффициент полезного действия тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H},$$

где A - работа, совершенная рабочим веществом в течение цикла; Q_H - количество теплоты, полученное рабочим веществом от нагревателя за это время; Q_X - количество теплоты, отданное им при этом холодильнику.

8. Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно:

$$\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H},$$

где T_H и T_X - наивысшая и наименьшая температуры рабочего вещества.

9. Второе начало термодинамики. Энтропия замкнутой системы при любых происходящих в ней процессах не уменьшается - она возрастает при необратимых процессах и остается постоянной при обратимых процессах, т.е.

$$\Delta S \geq 0.$$

10. Изменение энтропии термодинамической системы в любом обратимом процессе, переводящем ее из состояния А в состояние В:

$$\Delta S = S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}.$$

Анализ задач целесообразно начинать с графического изображения процессов. Для лучшего понимания рассматриваемых явлений важно привлекать молекулярно-кинетические представления.

Примеры решения задач

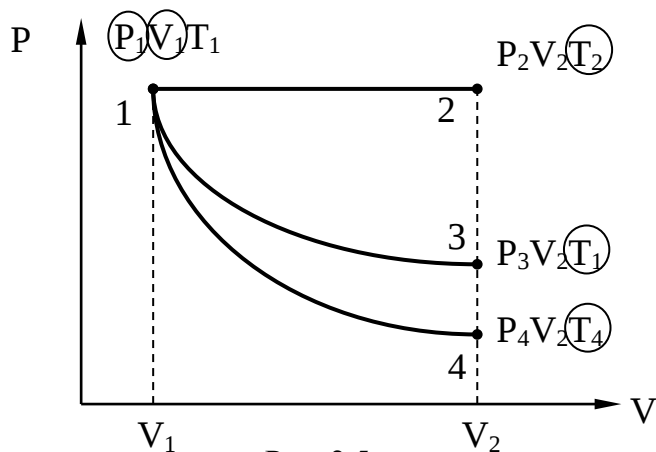


Рис. 2.5

Задача 1. Азот, занимающий при давлении $P_1 = 10^5$ Па объем $V_1 = 10$ л, расширяется вдвое. Найти конечное давление и работу, совершаемую газом при следующих процессах: 1) изобарическом, 2) изотермическом, 3) адиабатическом (рис. 2.5).

Решение

На рис. 2.5 показаны все три нужные нам процессы – изобарический (1-2), изотермический (1-3) и адиабатический (1-4). Для решения задачи удобно указать на графиках процессов параметры каждого состояния и обвести кружком параметры, известные по условию задачи.

1) При изобарическом процессе конечное давление равно начальному:

$$P_2 = P_1 .$$

Работа газа при изобарическом процессе

$$A_{12} = P_1(V_2 - V_1); \quad A_{12} = 10^5 (20 - 10) \cdot 10^{-3} = 1000 \text{ Дж.}$$

2) При изотермическом процессе конечное давление

$$P_3 = P_1 V_1 / V_2; \quad P_3 = 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} / 20 \cdot 10^{-3} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Работа газа при этом процессе, учитывая то, что $P_1 V_1 = \frac{M}{\mu} RT$:

$$A_{13} = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad A_{13} = 10^5 \cdot 10^{-2} \ln 2 = 690 \text{ Дж.}$$

3) При адиабатическом процессе конечное давление

$$P_4 = P_1 (V_1 / V_2)^\gamma;$$

Азот - двухатомный газ, $i = 5$, поэтому $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = 1,4$.

Тогда

$$P_4 = 10^5 (0,5)^{1,4} = 0,38 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении, равна убыли его внутренней энергии: $A_{14} = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_1 - T_4)$.

Из уравнения состояния идеального газа, написанного для начального и конечного состояний, получаем:

$$\frac{M}{\mu} RT_1 = P_1 V_1, \quad \frac{M}{\mu} RT_4 = P_4 V_2.$$

Подставляя эти выражения в формулу для работы, находим

$$A_{14} = \frac{i}{2} (P_1 V_1 - P_4 V_2); \quad A_{14} = 600 \text{ Дж.}$$

Задача 2. Количество $\nu = 0,5$ моля идеального одноатомного газа нагревают от температуры $T_1 = 250 \text{ К}$ до $T_2 = 500 \text{ К}$ так, что в процессе нагрева $P/V = \text{const}$. Определить молярную теплоемкость и рассчитать количество теплоты, поглощенное газом при нагревании.

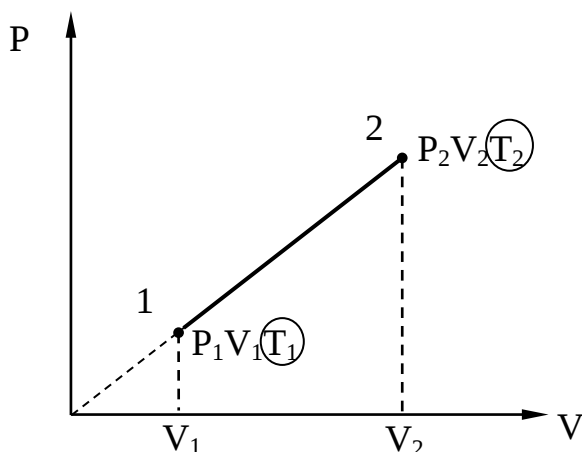


Рис. 2.6

Решение

Изобразим график процесса в координатах P, V (рис. 2.6).

По определению, молярная теплоемкость

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT}. \quad (1)$$

С другой стороны, из первого начала термодинамики, записанного в дифференциальной форме, следует:

$$\delta Q = dU + dA = \nu \frac{i}{2} R dT + P dV.$$

Тогда

$$C = \frac{i}{2} R + \frac{1}{\nu} P \frac{dV}{dT}. \quad (2)$$

Подставим выражение давления, полученное из уравнения состояния $P = \nu R T / V$, поочередно в формулу (2) и в уравнение процесса $P / V = \text{const}$:

$$C = \frac{i}{2} R + R \frac{T}{V} \frac{dV}{dT}, \quad (3)$$

$$\frac{V^2}{T} = \text{const}. \quad (4)$$

Чтобы найти dV / dT , продифференцируем выражение (4) по переменной T :

$$\frac{2V(dV/dT) - V^2}{T^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{dV}{dT} = \frac{1}{2} \frac{V}{T}. \quad (5)$$

Подставим выражение (5) в (3):

$$C = \frac{i}{2} R + \frac{R}{2} = \frac{i+1}{2} R.$$

Искомая молярная теплоемкость постоянна, причем $C_V < C < C_P$. Рассматриваемый газ - одноатомный ($i = 3$). Тогда

$$C = \frac{3+1}{2} \cdot 8,31 = 16,6 \text{ Дж / (моль} \cdot \text{К)}.$$

Количество теплоты, поглощенное газом при нагревании:

$$Q_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \delta Q = \nu C (T_2 - T_1) = 2,1 \text{ кДж}.$$

Задача 3. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S = 15 \text{ см}^2$ находится воздух массой $M = 0,2 \text{ г}$ при температуре $t = 20^\circ \text{C}$. Определить работу, которую надо совершить при медленном равномерном подъеме поршня на высоту от $h_1 = 10 \text{ см}$ до $h_2 = 20 \text{ см}$. Атмосферное давление нормальное.

Решение

При равномерном подъеме поршня на него действует $F_{\text{вн}}$ – внешняя сила, F_1 – сила давления со стороны воздуха, находящегося под поршнем, F_a – сила давления атмосферного воздуха (рис. 2.7).

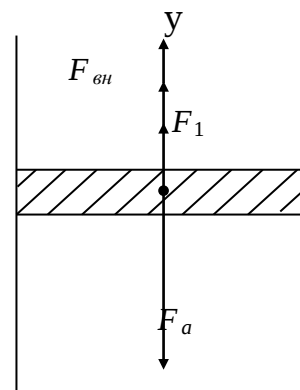


Рис. 2.7

Работа внешней силы по подъему поршня с высоты h_1 до высоты h_2 :

$$A = \int_{h_1}^{h_2} F_{\text{вн}} \cdot dh. \quad (6)$$

Чтобы найти внешнюю силу, запишем условие равновесия поршня в скалярной форме относительно оси y (движение равномерное):

$$F_{\text{вн}} = F_a - F_1.$$

Согласно определению, $F_a = P_0 S$, $F_1 = PS$. Здесь P_0 – атмосферное давление, $P = MRT / \mu V$ – давление газа, находящегося под поршнем, где $V = Sh$ – объем воздуха, находящегося под поршнем, когда поршень находится на произвольной высоте h . Тогда

$$F_1 = MRT / \mu h.$$

Подставляя формулы для F_a и F_1 в выражение (6) и принимая $T = \text{const}$ (поскольку движение поршня медленное), найдем работу внешней силы интегрированием:

$$\begin{aligned} A &= \int_{h_1}^{h_2} (F_a - F_1) dh = \int_{h_1}^{h_2} F_a dh - \int_{h_1}^{h_2} F_1 dh = \int_{h_1}^{h_2} P_0 S dh - \int_{h_1}^{h_2} \frac{MRT}{\mu h} dh = \\ &= P_0 S (h_2 - h_1) - \frac{MRT}{\mu} \ln \frac{h_2}{h_1}. \end{aligned}$$

Подставляя численные значения, получим

$$A = 3,5 \text{ Дж}.$$

Задача 4. Кислород нагревают от $t_1 = 50^\circ \text{C}$ до $t_2 = 60^\circ \text{C}$. Масса кислорода $M = 160 \text{ г}$. Найти количество поглощенной теплоты и изменение внутренней энергии при изохорическом и изобарическом процессах. Начальное давление равно атмосферному.

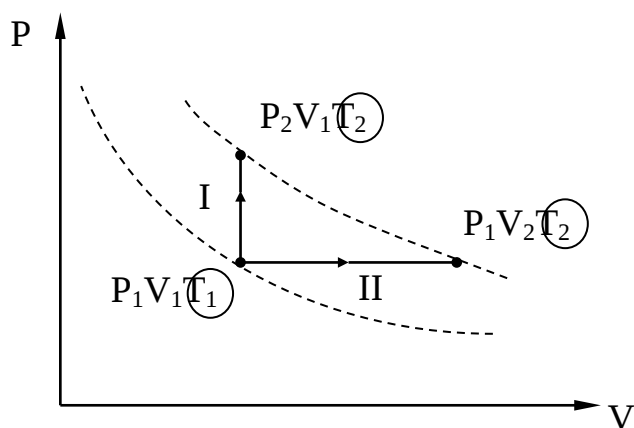


Рис. 2.8

Решение

При давлении, близком к атмосферному, газ можно считать идеальным. Графики изохорического I и изобарического II процессов лежат между одними и теми же изотермами (рис. 2.8), следовательно, изменение внутренней энергии газа в этих процессах должно быть одинаковым:

$$\Delta U_V = \Delta U_P = \frac{M}{\mu} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1),$$

где $i = 5$ - число степеней свободы двухатомной молекулы кислорода. Тогда

$$\Delta U_V = \Delta U_P = 1010 \text{ Дж.}$$

Поскольку оба процесса характеризуются постоянными молярными теплоемкостями, искомое количество теплоты может быть найдено по формуле

$$Q = \frac{M}{\mu} C (T_2 - T_1),$$

где C - молярная теплоемкость, зависящая от характера процесса.

При изохорическом процессе газ не совершает работы, следовательно

$$Q_V = \Delta U_V = 1010 \text{ Дж.}$$

При изобарическом процессе, учитывая, что молярная теплоемкость $C_P = \frac{i+2}{2} R$, получаем

$$Q_P = \frac{M}{\mu} \frac{(i+2)}{2} R (T_2 - T_1).$$

$$Q_P = 1450 \text{ Дж.}$$

Очевидно, что разность $Q_P - \Delta U_P$ равна работе, совершенной газом при изобарическом нагревании.

Задача 5. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из изотермического, изобарического и адиабатического процессов. При изобарическом процессе рабочее тело (идеальный газ) нагревается от температуры $T_1 = 200 \text{ К}$ до $T_2 = 300 \text{ К}$. Определить к.п.д. данного теплового двигателя и двигателя, работающего по циклу Карно, совершающемуся между максимальной и минимальной температурами данного цикла.

Решение

В условии задачи не оговорена последовательность процессов, но поскольку изобарический процесс, по условию, - процесс нагревания, следовательно, и расширения, то прямая, соответствующая графику этого процесса в координатах P, V , должна лежать выше кривых, изображающих изотермический и адиабатический процессы (рис. 2.9).

При последовательности процессов, изображенных на графике, газ получает теплоту только в процессе 1-2, поэтому $Q_1 = Q_{12}$, и отдает теплоту в процессе 3-1, значит, $Q_2 = |Q_{31}|$. Процесс 2-3 происходит без теплообмена с окружающей средой.

Количество теплоты, получаемое рабочим телом при изобарическом процессе:

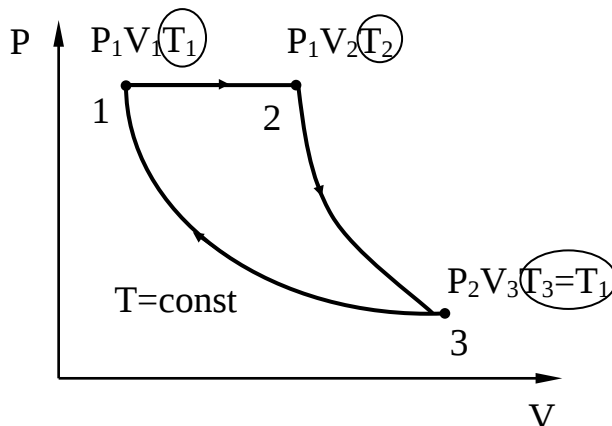


Рис. 2.9

$$Q_{12} = \frac{M}{\mu} C_p R (T_2 - T_1), \quad (7)$$

где $C_p \frac{i+2}{2}$ - молярная теплоемкость при постоянном давлении.

Количество теплоты, отдаваемое рабочим телом при изотермическом сжатии,

$$|Q_{31}| = \frac{M}{\mu} R T_1 \ln \frac{V_3}{V_1}. \quad (8)$$

Для процесса 3-1 количество теплоты Q_{31} пропорционально $\ln \frac{V_1}{V_3}$. Поскольку $V_1 < V_2$, логарифм будет отрицательным, поэтому в выражении для $|Q_{31}|$ стоит $\ln \frac{V_3}{V_1}$.

Объемы газа и их отношения неизвестны, однако состояния 1 и 2 лежат на одной изобаре, поэтому

$$V_2 / V_1 = T_2 / T_1. \quad (9)$$

Состояния 2 и 3 лежат на одной адиабате, значит

$$(V_3 / V_2)^{\gamma-1} = T_2 / T_3. \quad (10)$$

Учитывая, что $T_3 = T_1$, и извлекая корень степени $\gamma - 1$, получаем,

$$V_3 / V_2 = (T_2 / T_1)^{1/\gamma-1}. \quad (11)$$

Перемножая почленно равенства (9) и (11), находим

$$V_3 / V_1 = (T_2 / T_1)^{\gamma/\gamma-1}.$$

Тогда

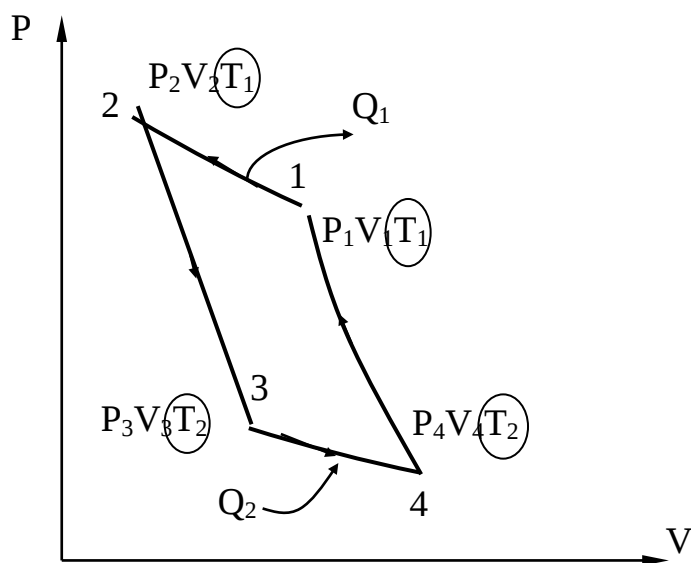


Рис.2.10

$$|Q_{31}| = \frac{M}{\mu} \frac{(i+2)}{2} RT_1 \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Если коэффициент Пуассона выразить через число степеней свободы молекулы, то $\gamma/(\gamma-1) = (i+2)/2$ и

$$|Q_{31}| = \frac{M}{\mu} \frac{(i+2)}{2} RT_1 \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (12)$$

к.п.д. цикла, согласно определению,

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_{12} - |Q_{31}|}{Q_{12}}. \quad (13)$$

Подставим выражение (7) и (12) в (13):

$$\eta = \frac{T_2 - T_1 - T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1}; \quad \eta = 1 - \frac{200}{300} \ln \frac{5}{2} = 0,39.$$

К.п.д. цикла Карно, происходящего между максимальной и минимальной температурами,

$$\eta_k = \frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{300}{500} = 0,6.$$

Задача 6. Холодильная машина работает по обратному циклу Карно в интервале температур $t_1 = 27^\circ\text{C}$ и $t_2 = -3^\circ\text{C}$. Рабочее тело - азот, масса которого $M = 0,2$ кг. Найти количество теплоты, отбираемое от охлаждаемого тела, и работу внешних сил за цикл, если отношение максимального объема к минимальному $\nu = 5$.

Решение

Холодильная машина - это машина, которая за счет работы внешних сил отнимает теплоту от охлаждаемого тела и передает ее более нагретой окружающей среде. Если холодильная машина работает по циклу Карно, то изотермическое сжатие рабочего тела, сопровождаемое работой внешних сил, происходит при более высокой температуре T_1 (рис. 2.10, участок 1-2). При этом рабочее тело отдает в окружающую среду, играющую роль термостата, количество теплоты Q_1 (очевидно, что $Q_1 = |Q_{12}|$).

На участке 3-4 при более низкой температуре T_2 происходит изотермическое расширение рабочего тела, при этом от охлаждаемого тела

(термостат при температуре T_2) отбирается количество теплоты $Q_2 = Q_{34}$. Поскольку речь идет об обратимом цикле Карно, для него справедливо соотношение

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad \text{или} \quad \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (14)$$

Согласно первому началу термодинамики, работа газа за цикл равна полному количеству теплоты, получаемому за цикл:

$$A = -Q_1 + Q_2.$$

Из рис. 10 легко видеть, что работа газа за цикл при указанном направлении процесса отрицательная. Работа внешних сил за цикл

$$A^* = -A = Q_1 - Q_2. \quad (15)$$

Искомое количество теплоты $Q_2 = Q_{34}$.

При изотермическом расширении идеального газа

$$Q_{34} = A_{34} = \frac{M}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (16)$$

Как видно из графика, максимальный объем газа в цикле V_1 , минимальный – V_2 , следовательно,

$$\frac{V_1}{V_2} = \epsilon. \quad (17)$$

Второе и третье состояния лежат на одной адиабате, проведенной в интервале температур от T_1 к T_2 . Следовательно,

$$\left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (18)$$

Перемножив почленно равенства (17) и (18), найдем

$$\frac{V_4}{V_3} = \epsilon \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Подставим это выражение в (16):

$$Q_2 = Q_{34} = \frac{M}{\mu} RT_2 \left(\ln \epsilon + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Азот - двухатомный газ, следовательно, коэффициент Пуассона $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{5+2}{5} = 1,4$.

Тогда $Q_2 = 21,6$ кДж.

Чтобы найти работу внешних сил за цикл, выразим Q_1 из уравнения (14) и подставим полученное значение в уравнение (15):

$$A^* = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right), \quad A^* = 2,4 \text{ кДж.}$$

Задача 7. Кислород, масса которого $M = 200$ г, нагревают от температуры $t_1 = 27^\circ\text{C}$ до $t_2 = 127^\circ\text{C}$. Найти изменение энтропии, если известно, что начальное и конечное давления одинаковы и близки к атмосферному.

Решение

Последняя оговорка в условии показывает, что в рассматриваемой задаче кислород подчиняется законам идеального газа.

Характер процесса нагрева нам неизвестен. Но изменение энтропии системы при переходе из одного состояния в другое определяется только параметрами этих состояний и не зависит от характера процесса. Найти из-

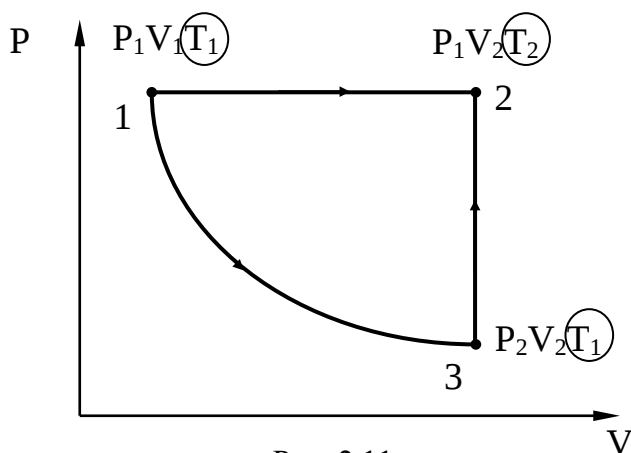


Рис. 2.11

менение энтропии можно, рассмотрев произвольный обратимый процесс, в результате которого систему (в данном случае идеальный газ) можно перевести из состояния 1 в состояние 2 (рис. 2.11).

На рисунке показаны два таких возможных процесса: первый - изобарическое расширение 1-2; второй - изотермическое расширение 1-3 с последующим изохорическим нагреванием 3-2.

Для процесса 1-2 изменение энтропии равно:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_p}{T},$$

где $\delta Q_p = \frac{M}{\mu} C_p dT$; $C_p = \frac{i+2}{2} R$.

Тогда

$$S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu} \frac{(i+2)}{2} R \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{M}{\mu} \frac{(i+2)}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Кислород - двухатомный газ ($i = 5$), и для заданных температур изменение энтропии равно:

$$S_2 - S_1 = 52 \text{ Дж/К}.$$

Легко проверить, что результат не изменится при переходе 1-3-2:

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T_1} \int_1^3 \delta Q_T + \int_3^2 \frac{\delta Q_V}{T},$$

где $\delta Q_T = \delta A = p dV$; $\delta Q_V = \frac{M}{\mu} C_V dT$.

Учитывая, что при изотермическом процессе $P = \frac{P_1 V_1}{V} = \frac{MRT}{\mu V}$, получим

$$S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu} R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} + \frac{M}{\mu} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \frac{M}{\mu} R \ln(V_2/V_1) + \frac{M}{\mu} C_V \ln(T_2/T_1).$$

Принимая во внимание, что $T_2/T_1 = V_2/V_1$, окончательно получаем

$$S_2 - S_1 = \frac{M}{\mu} (R + C_V) \ln(T_2/T_1) = \frac{M}{\mu} \frac{i+2}{2} R \ln(T_2/T_1).$$

Задачи, рекомендуемые для решения в аудитории

1. Газ, занимавший объем 2 л при давлении 0,1 МПа, расширился изотермически до 4 л. После этого, охлаждая газ изохорически, уменьшили давление в 2 раза. Далее газ изобарически расширился до 8 л. Найдите работу, совершенную газом. Начертите график зависимости давления от объема.

Ответ: $A = 240$ Дж.

2. В цилиндре под поршнем площадью $S = 1$ дм² находится 1 моль воздуха. К поршню через блок привешен груз массой $m_1 = 55$ кг. Цилиндр охлаждают на $\Delta T = 100$ К. На какую высоту поднимется груз? Масса поршня $m_2 = 5$ кг. Атмосферное давление нормальное, $P_A = 10^5$ Па.

Ответ: $h = 1,6$ м.

3. Определить удельную теплоемкость C_V смеси (50 % по массе водорода и гелия), заключенной в объеме $V = 1$ л при температуре $t = 27$ °С и давлении $P = 106,4$ кПа. Молярные теплоемкости водорода H_2 : $C_{V1} = 20,95$ Дж/(моль·К) и гелия He : $C_{V2} = 12,57$ Дж/(моль·К).

Ответ: $C_V = 0,775$ Дж/(моль·К).

4. 14 г азота адиабатически расширяются так, что давление уменьшается в пять раз, и затем изотермически сжимаются до первоначального давления. Начальная температура азота $T_1 = 420$ К. Изобразить процесс на диаграмме PV . Найти:

- а) температуру газа T_2 в конце процесса;
- б) количество тепла Q' , отданное газом;
- в) приращение внутренней энергии газа ΔU ;
- г) совершенную газом работу A .

Ответ: $T_2 = 264$ К; $Q' = 1,76$ кДж; $\Delta U = -1,62$ кДж; $A = 0,14$ кДж.

5. Рассчитать, во сколько раз изменится число ударов, испытываемых 1 см² стенки сосуда за 1 с при двукратном увеличении объема идеального двухатомного газа в случаях изобарического, изотермического и адиабатического расширений.

Ответ: а) $Z_2/Z_1 = 0,7$; б) $Z_2/Z_1 = 0,5$; в) $Z_2/Z_1 = 0,44$.

6. Цикл, совершаемый двумя киломолями идеального одноатомного газа, состоит из изотермы, изобары и изохоры. Изотермический процесс происходит при максимальной температуре цикла, равной 400 К. Известно также, что в пределах цикла объем газа изменяется в два раза, т.е. $a = V_{max}/V_{min} = 2$.

А. Вычислить работу A газа за цикл и к.п.д. цикла.

Б. Сравнить полученное значение η с к.п.д. цикла Карно η_k , проводимого в интервале температур от T_{min} до T_{max} данного цикла.

Ответ: а) $A = 1,28$ МДж, $\eta = 13\%$ б) $\eta/\eta_k = 27\%$.

7. Идеальная тепловая машина Карно, цикл которой совершается в обратном направлении (холодильная машина), использует воду при 0 °С в качестве холодильника и воду при 100 °С в качестве нагревателя. Сколько воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар 500 г воды в кипятильнике?

Ответ: $m = 2,47$ кг.

8. Вычислить приращение энтропии ΔS при нагревании 1 кмоль идеального трехатомного газа от 0 °С до 500 °С, если процесс нагревания происходит а) при постоянном объеме; б) при постоянном давлении. Считать молекулы жесткими.

Ответ: а) $\Delta S_1 = 26$ кДж/(кмоль·К) б) $\Delta S_2 = 35$ кДж/(кмоль·К).

Домашнее задание

1. В закрытом сосуде объемом 2,5 л находится водород при температуре 17 °С и давлении 15 кПа. Водород охлаждают до температуры 0 °С. Вычислить а) количество отданного газом тепла Q ; б) приращение внутренней энергии водорода ΔU .

2. 1 кмоль газа изобарически нагревается от 17 °С до 75 °С. При этом газ поглощает 1,2 МДж тепла. Найти а) значение коэффициента Пуассона $\gamma = C_p/C_v$; б) приращение внутренней энергии газа ΔU ; в) работу газа A .

3. 1 кг кислорода сжимается адиабатически, вследствие чего температура газа возрастает от 20 °С до 100 °С. Изобразить этот процесс на диаграмме U, T . Вычислить: а) приращение внутренней энергии газа ΔU ; б) работу A' , затраченную на сжатие газа; в) во сколько раз уменьшился объем газа.

4. Азот N_2 массой 10 г расширился изотермически при температуре 20 °С, изменив давление от 202 кПа до 101 кПа. Определить работу расширения, изменение внутренней энергии азота и количество сообщенной ему теплоты.

5. Какое количество тепла Q потребовалось подвести к 1 молю одноатомного газа при его обратимом изобарическом нагревании, если в процессе нагревания газ совершил работу $A = 10$ Дж?

6. Найти изменение внутренней энергии ΔU 1 моля идеального одноатомного газа, изобарически расширившегося от объема $V_1 = 10$ л до объема $V_2 = 20$ л при давлении $P = 0,5$ МПа.

7. Каковы удельные теплоемкости C_p и C_v смеси газов, содержащей кислород массой $M_1 = 10$ г и азот массой $M_2 = 20$ г?

8. Найти отношение C_p / C_v для смеси газов, состоящей из 10 г гелия и 4 г водорода.

9. Смесь газов состоит из двух молей одноатомного и трех молей двухатомного газа. Определить молярные теплоемкости C_p и C_v смеси.

10. Количество $\nu = 1$ моль кислорода нагревается при постоянном давлении от температуры $t_0 = 0$ °С. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его объем удвоился? Удельная теплоемкость кислорода при этих условиях $C_p = 912$ Дж/(кг·К), молярная масса кислорода $\mu = 0,032$ кг/моль.

11. Газ, занимающий объем $0,39$ м³ при давлении 155 кПа, изотермически расширяется до десятикратного объема и затем изохорически нагревается так, что в конечном состоянии его давление равно первоначальному. При этом процессе газу сообщается количество тепла, равное $1,5$ МДж. Изобразить процесс на диаграмме P, V . Вычислить $\gamma = C_p / C_v$ для этого газа.

12. Кислород массой $M = 0,3$ кг при температуре $T_1 = 320$ К охладили изохорически, вследствие чего его давление уменьшилось в 3 раза. Затем газ изобарически расширили так, что его температура стала равна первоначальной. Какую работу совершил газ? Как изменилась его внутренняя энергия?

13. Идеальный двухатомный газ, занимавший при давлении $P_1 = 3 \cdot 10^5$ Па объем $V_1 = 4$ л, расширяют до объема $V_2 = 6$ л, при этом давление падает до значения $P_2 = 10^5$ Па. Процесс происходит сначала по адиабате, затем по изохоре. Определить работу сил давления газа, изменение его внутренней энергии и количество поглощенной при этом переходе теплоты.

14. 1 кмоль газа, находящегося при температуре $T_1 = 300$ К, охлаждается изохорически, вследствие чего его давление уменьшается в 2 раза. Затем газ изобарически расширяется так, что в конечном состоянии его температура равна первоначальной. Изобразить процесс на диаграмме P, V . Вычислить: а) количество поглощённого газом тепла Q ; б) совершенную газом работу A ; в) приращение внутренней энергии газа ΔU .

15. Один моль азота, занимавший при атмосферном давлении объем $V_1 = 22,4$ л, адиабатически сжимается до объема $V_2 = V_1 / 2$, а затем изотермически расширяется до первоначального объема. Вычислить: а) P_2 и T_2 ; б) суммарную работу газа; в) конечную температуру T_3 .

16. Один моль одноатомного газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом максимальное давление в 2 раза больше минимального, а максимальный объем в 3 раза больше минимального. Определить к.п.д. цикла.

17. В паровой турбине расходуется $m = 0,45$ кг дизельного топлива, при сгорании которого выделяется теплота на совершение работы $A = 1,4$ кВт.ч. Температура поступающего в турбину пара $T_n = 520$ К, температура холодильника $T_x = 300$ К. Сравнить фактический к.п.д. турбины и к.п.д. идеальной тепловой машины, работающей при тех же температурных режимах.

18. Газ, совершающий цикл Карно, 70 % теплоты, полученной от нагревателя, отдает холодильнику. Температура нагревателя $T_1 = 430$ К. Определить температуру холодильника.

19. Тепловая машина работает по циклу Карно, к.п.д. которого равен $\eta = 0,25$. Каков будет холодильный коэффициент машины, если она будет совершать тот же цикл в обратном направлении? Холодильным коэффициентом называется отношение количества теплоты, отнятого от охлаждающего тела, к работе двигателя, приводящего в движение машину.

20. Один киломоль идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объем газа изменяется от $V_1 = 25$ м³ до $V_2 = 50$ м³ и давление изменяется от $P_1 = 0,1$ МПа до $P_2 = 0,2$ МПа. Во сколько раз работа, совершаемая при таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температуре рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объем увеличился в 2 раза?

21. Беззаботный экспериментатор, торопясь уйти, оставил золотник резервуара, наполненного гелием, неплотно закрытым. Газ, первоначально находившийся при давлении 20 МПа, медленно изотермически выходит из резервуара при температуре 20 °С. Чему равно изменение энтропии на 1 кг газа?

22. Найти приращение энтропии ΔS при расширении 0,2 г водорода от объема 1,5 л до объема 4,5 л, если процесс расширения происходит: а) при постоянном давлении; б) при постоянной температуре.

23. 2 кг кислорода при давлении 100 кПа занимают объем 1,5 м³. В результате расширения объем газа увеличился в 2,5 раза, а давление уменьшилось в 3 раза. Найти приращение внутренней энергии ΔU и энтропии ΔS газа.

24. Найти изменение энтропии ΔS 5г водорода, изотермически расширившегося от объема 10 л до объема 25 л.

25. Изменение энтропии на участке между двумя адиабатами в цикле Карно равно 4,19 кДж/К. Разность температур между двумя изотермами равна 100 °С. Какое количество тепла превращается в работу в этом цикле?

Варианты индивидуального задания

№ варианта	Тема №1	Тема №2
1	1,12,22	1,11,16
2	2,13,23	2,12,17
3	3,14,24	3,13,18
4	4,15,25	4,14,19
5	5,16,22	5,15,20
6	6,17,23	6,11,21
7	7,18,24	7,12,22
8	8,19,25	8,13,23
9	9,20,22	9,14,24
10	10,21,23	10,15,25
11	11,12,24	1,12,28
12	1,13,25	2,13,19
13	2,14,22	3,14,20
14	3,15,23	4,15,21
15	4,16,24	5,11,22
16	5,17,25	6,12,23
17	6,18,22	7,13,24
18	7,19,23	8,14,25
19	8,20,24	9,15,16
20	9,21,25	10,11,17
21	10,12,22	1,14,18
22	11,13,23	2,15,19
23	1,14,24	3,11,20
24	2,15,25	4,12,21
25	3,16,22	5,13,22

ГЛАВА 3. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

3.1. Электростатика

3.1.1. Закон Кулона. Методы расчета электростатических полей Основные формулы

1. Закон Кулона:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где $\vec{F}$ - сила взаимодействия двух точечных зарядов, q_1 и q_2 - величины зарядов, r - расстояние между зарядами, ϵ - диэлектрическая проницаемость среды, ϵ_0 - электрическая постоянная, $\vec{r}$ - радиус-вектор, соединяющий заряды.

2. Основные характеристики электростатического поля:

а) напряженность поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q};$$

б) потенциал поля

$$\varphi = \frac{W}{q},$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая на заряд q , в данной точке поля, W - потенциальная энергия заряда q в данной точке поля.

Для поля, созданного точечным зарядом:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

3. Принцип суперпозиции:

а) поле, созданное системой из n точечных зарядов:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i, \quad \text{где} \quad \vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}.$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i, \quad \text{где} \quad \varphi_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_i}.$$

б) поле, созданное непрерывно распределенными зарядами:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}, \quad \text{где} \quad d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

$$\varphi = \int d\varphi, \quad \text{где} \quad d\varphi = \frac{dq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}.$$

В этих уравнениях интегрирование ведется по длине, поверхности или объему тела в зависимости от того, как распределен электрический заряд.

4. Теорема Гаусса: Поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных электрических зарядов, расположенных внутри этой поверхности, деленной на $\epsilon\epsilon_0$:

$$N_E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0},$$

где $N_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S})$ - поток вектора напряженности электрического поля, q – свободный суммарный электрический заряд внутри поверхности S .

5. Связь напряженности с потенциалом:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Тонкий стержень длиной $l = 10$ см заряжен с линейной плотностью $\tau = 400$ нКл/м. Найти напряженность электрического поля в точке, расположенной на перпендикуляре к стержню, проведенном через один из его концов, на расстоянии $r_0 = 8$ см от этого конца.

Решение

Применим принцип суперпозиции для поля непрерывно распределенных зарядов:

$$\vec{E} = \int d\vec{E}.$$

Выделим на стержне малый участок длиной dl . Находящийся на нем заряд $dq = \tau dl$ можно считать точечным и напряженность поля, созданного им, рассчитывать как

$$d\vec{E} = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Из приведенного чертежа видно, что

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha};$$

$$dl = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}.$$

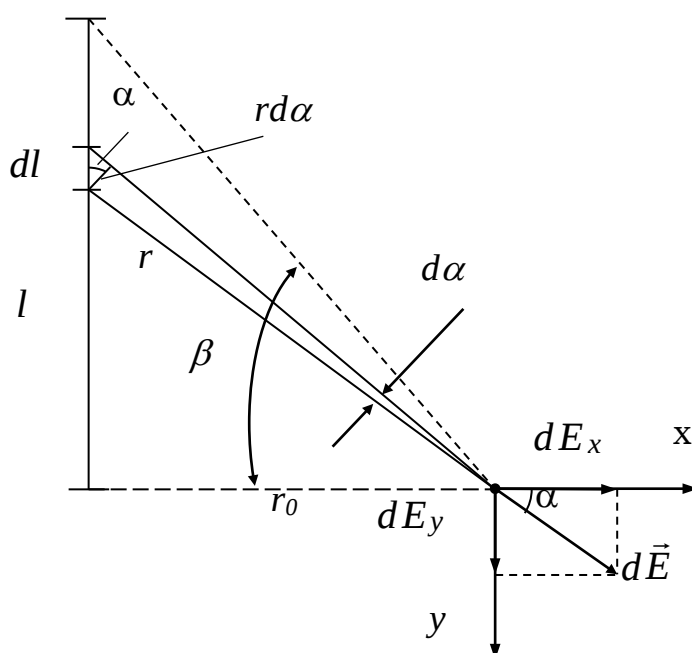


Рис.3.1

Следует иметь в виду, что $d\vec{E}$ - вектор, поэтому прежде чем интегрировать, выберем направления осей x и y и найдем проекции вектора $d\vec{E}$ на эти оси: $dE_x = dE \cos \alpha$; $dE_y = dE \sin \alpha$, или, учитывая приведенные выше формулы:

$$dE_x = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \cos \alpha d\alpha; \quad dE_y = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0 r_0} \sin \alpha d\alpha.$$

Интегрируя эти выражения в пределах от 0 до β (угол β указан на рис. 3.1), получим:

$$E_x = \int dE_x = \int_0^\beta \frac{\tau \cos \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{\tau \sin \beta}{4\pi\epsilon_0 r_0},$$

$$E_y = \int dE_y = \int_0^\beta \frac{\tau \sin \alpha d\alpha}{4\pi\epsilon_0 r_0} = \frac{\tau(1 - \cos \beta)}{4\pi\epsilon_0 r_0},$$

где E_x и E_y - проекции результирующего вектора $\vec{E}$ на оси x и y .

$$\sin \beta = \frac{l}{\sqrt{r_0^2 + l^2}}, \quad \cos \beta = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + l^2}}.$$

Подставим числовые значения заданных величин в системе СИ и произведем вычисления:

$$E_x = 35,1 \cdot 10^3 \text{ В/м},$$

$$E_y = 16,1 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Вектор напряжённости определится через проекции E_x и E_y :

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} = (35,1 \cdot \vec{i} + 16,1 \cdot \vec{j}) \cdot 10^3 \text{ В/м},$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - орты осей x и y .

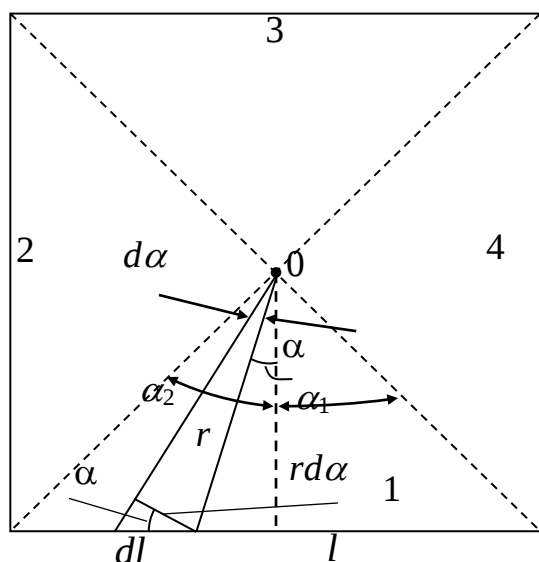


Рис. 3.2

Модуль вектора напряженности

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2},$$

$$E = 39 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Задача 2. Тонкие стержни образуют квадрат со стороной l . Стержни заряжены с линейной плотностью $\tau = 1,33 \text{ нКл/м}$. Найти потенциал φ в центре квадрата.

Решение

По принципу суперпозиции, потенциал поля, созданного в точке O всеми сторонами квадрата, равен сумме потенциалов полей, созданных каждой из этих сторон:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4.$$

Поскольку стороны квадрата расположены симметрично относительно точки О, то можно считать, что $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_4$ и $\varphi = 4 \varphi_1$.

Следовательно, для нахождения φ достаточно найти потенциал φ_1 поля, созданного в точке О одной из сторон квадрата. Разобьем эту сторону на элементарные отрезки dl . Заряд, находящийся на каждом из них, $dq = \tau dl$ можно рассматривать как точечный, тогда

$$d\varphi = \frac{\tau dl}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Из рис. 3.2 следует, что $dl = \frac{r d\alpha}{\cos \alpha}$, где $d\alpha$ - угол, под которым виден элементарный отрезок dl из точки О, r - расстояние от точки О до этого элемента, тогда

$$d\varphi = \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha}.$$

Интегрируя полученное выражение в пределах от α_1 до α_2 , и учитывая, что точка О расположена симметрично относительно углов квадрата и поэтому $\alpha_1 = -\alpha_2 = \pi/4$, получим потенциал φ_1 :

$$\varphi_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\tau d\alpha}{4\pi\epsilon_0 \cos \alpha} = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \quad \varphi_1 = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4}$$

Здесь учтено, что поскольку точка О расположена симметрично относительно углов квадрата, то $\alpha_1 = -\alpha_2 = \pi/4$, поэтому

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} = 2 \int_0^{\alpha_1} \frac{d\alpha}{\cos \alpha}.$$

Подставляя пределы интегрирования, получим для φ_1 :

$$\varphi_1 = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\ln \operatorname{tg} \frac{3}{8} \pi - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \operatorname{tg} \frac{3}{8} \pi.$$

Потенциал результирующего поля в 4 раза больше, поэтому

$$\varphi = \frac{2\tau}{\pi\epsilon_0} \ln \operatorname{tg} \frac{3}{8} \pi.$$

После подстановки числовых значений получим

$$\varphi = 84,4 \text{ В.}$$

Задача 3. Лист стекла ($\epsilon = 7$) толщиной $d = 2$ см равномерно заряжен с объемной плотностью заряда $\rho = 1$ мкКл/м³. Определить напряженность E электрического поля в точках А, В, С (см. рис. 3). Построить график зависимости $E(X)$.

Решение

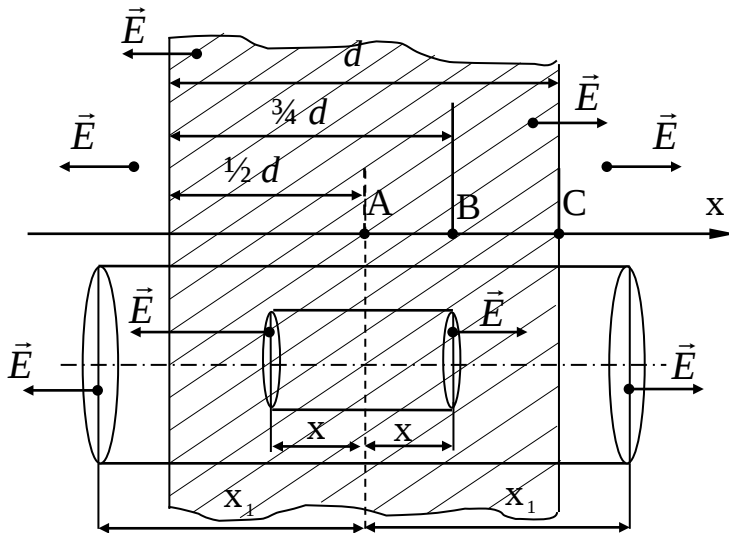


Рис. 3.3

Для решения задачи применим метод Гаусса. Из условия следует, что заряд, создающий поле, распределен в пространстве симметрично относительно плоскости, проходящей через точку А перпендикулярно оси X . Поэтому есть основание утверждать, что электрическое поле симметрично относительно этой плоскости. Кроме того, полагая, что точки А, В и С доста-

точно удалены от краев листа стекла, можно считать его бесконечным. Тогда линии напряженности в любой точке будут расположены параллельно оси X .

Исходя из сказанного, будем выбирать гауссову поверхность в виде цилиндра, образующие которого параллельны оси X , а основания перпендикулярны к ней и удалены от плоскости симметрии на равное расстояние. Начало координат оси X расположим в точке А.

Разобьем пространство на две области, первая область внутри листа стекла ($|x| \leq d/2$), а вторая снаружи листа стекла ($|x| > d/2$) и найдем для этих областей напряженность электрического поля.

1. $|x| \leq d/2$. Поток вектора напряженности через выбранную цилиндрическую поверхность

$$N_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \int_{S_{бок}} (\vec{E} d\vec{S}) + \int_{S_{осн}} (\vec{E} d\vec{S}) + \int_{S_{осн}} (\vec{E} d\vec{S}),$$

Первый интеграл этого выражения равен нулю, поскольку линии напряженности не пересекают боковую поверхность цилиндра. Второй и третий интегралы равны по признаку симметрии. Поэтому

$$N_E = 2 \int_{S_{осн}} (\vec{E} d\vec{S}) = 2ES_{осн}.$$

Заряд, попавший внутрь выбранной поверхности

$$q = \rho \cdot 2x \cdot S_{осн}.$$

Тогда по теореме Гаусса

$$2ES_{осн} = \frac{\rho 2x S_{осн}}{\epsilon \epsilon_0}, \text{ откуда } E = \frac{\rho x}{\epsilon \epsilon_0}.$$

2. $|x| > d/2$. Поток вектора напряженности через поверхность цилиндра, как и в предыдущем случае,

$$N_E = 2ES_{\text{осн.}}$$

Заряд, попавший внутрь гауссовой поверхности:

$$q = \rho \cdot S_{\text{осн}} d.$$

По теореме Гаусса

$$2ES_{\text{осн}} = \rho S_{\text{осн}} d / \varepsilon_0,$$

т.к. $\varepsilon = 1$ вне листа стекла.

Тогда

$$E = \rho d / 2\varepsilon_0.$$

Нарисуем график зависимости проекции вектора напряженности E_x от координаты X . Отметим, что при переходе из стекла в воздух модуль вектора $\vec{E}$ скачком увеличивается в ε раз (рис.3.4).

Найдем теперь численные значения напряженности E в точках А, В, С.

1. $E_A = 0$ ($x=0$).

2. $E_B = \rho d / 4\varepsilon\varepsilon_0$;
 $E_B = 80,7$ В/м.

3. E_C (два значения):

$E_{C1} = \rho d / 2\varepsilon\varepsilon_0$;

$E_{C1} = 161,4$ В/м;

$E_{C2} = \rho d / 2\varepsilon_0$;

$E_{C2} = 7 E_{C1} = 1130$ В/м.

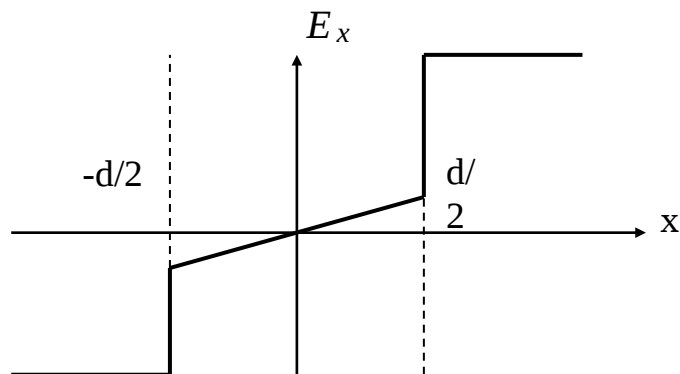


Рис. 3.4

Задача 4.

Сплошной эбонитовый шар ($\varepsilon = 3$) радиуса $R = 5$ см несёт заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определить напряженность электрического поля E в точках: 1) на расстоянии $r_1 = 3$ см от центра шара; 2) на поверхности шара; 3) на расстоянии $r_2 = 10$ см от центра шара. Построить график зависимости $E(r)$.

Решение

Применим метод Гаусса. Ввиду сферически симметричного распределения заряда есть основание утверждать, что линии вектора $\vec{E}$ в любой точке направлены вдоль радиусов, проведенных из точки O , и модуль вектора $\vec{E}$ имеет одинаковое значение на равных расстояниях от центра шара O .

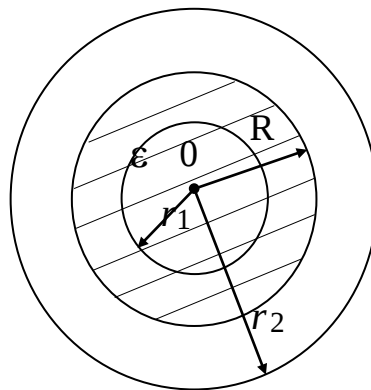


Рис. 3.5

Следовательно, в качестве гауссовых поверхностей имеет смысл выбирать сферы радиуса r с центром в точке O .

Рассмотрим две области пространства:

1) $r \leq R$.

Поток вектора напряженности через сферу

$$N_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_S (E dS) = E \int_S dS = ES = E4\pi r^2.$$

Заряд, попавший внутрь сферы,

$$q = 4\pi r^3 \rho / 3.$$

По теореме Гаусса

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^3 \rho / 3\epsilon\epsilon_0,$$

откуда

$$E = \rho r / 3\epsilon\epsilon_0.$$

2) $r > R$.

Поток вектора напряженности через сферу радиуса r , как и в предыдущем случае,

$$N_E = E \cdot 4\pi r^2.$$

Заряд, попавший внутрь сферы с радиусом $r > R$, - это весь заряд шара:

$$q = 4\pi R^3 \rho / 3.$$

По теореме Гаусса (т.к. $\mathcal{E} = 1$)

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi R^3 \rho / 3\epsilon_0,$$

Откуда

$$E = \rho R^3 / 3\epsilon_0 r^2.$$

Построим график зависимости $E(r)$ (см. рис. 3.6). Отметим, что на границе перехода из эбонита в воздух происходит скачок напряженности в ϵ раз.

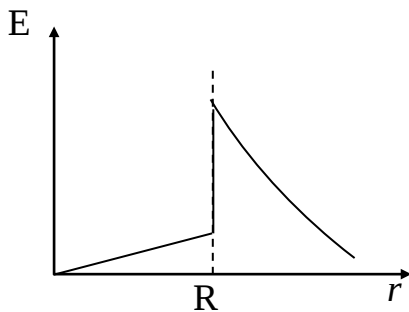


Рис. 3.6

Найдем численные значения

напряженности в требуемых точках.

1) $E(r_1) = \rho r_1 / 3\epsilon\epsilon_0.$ $E_1 = 3,37$ В/м.

2) $E(R)$ (два значения):

$$E(R)_1 = \rho R / 3 \epsilon\epsilon_0;$$

$$E(R)_1 = 6,28$$
 В/м.

$$E(R)_2 = \rho R / 3 \epsilon_0;$$

$$E(R)_2 = 3E(R)_1 = 18,8$$
 В/м.

3) $E(r_2) = \rho R^3 / 3 \epsilon_0 r_2^2;$ $E_3 = 4,7$ В/м.

Задача 5. Сплошной парафиновый шар ($\varepsilon = 2$) радиусом $R = 10$ см равномерно заряжен с объемной плотностью $\rho = 1$ мкКл/м³. Определить потенциал φ электрического поля в центре шара и на его поверхности. Построить график зависимости $\varphi(r)$.

Решение

Воспользуемся соотношением между напряженностью и потенциалом электростатического поля

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi.$$

Для поля со сферической симметрией, каким является поле шара, это соотношение можно записать в виде $E = -d\varphi / dr$, или $-d\varphi = Edr$.

Интегрируя данное выражение, получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} Edr.$$

Примем потенциал бесконечно удаленной точки за 0. Тогда

$$\varphi_R - \varphi_\infty = \int_R^\infty Edr,$$

где φ_R - потенциал на поверхности шара, или

$$\varphi_R = \int_R^\infty Edr.$$

Выражение для напряженности поля в пространстве, окружающем шар, ($r > R$) возьмём из предыдущей задачи:

$$E = \rho R^3 / 3\varepsilon_0 r^2.$$

Тогда

$$\varphi_R = \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right)_R^\infty = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}.$$

Разность потенциалов между центром шара и его поверхностью:

$$\varphi_0 - \varphi_R = \int_0^R Edr,$$

где φ_0 , - потенциал в центре шара.

Тогда

$$\varphi_0 = \varphi_R + \int_0^R Edr,$$

где $E = \rho r / 3\varepsilon\varepsilon_0$ (при $r \leq R$) возьмем из предыдущей задачи.

$$\varphi_0 = \varphi_R + \int_0^R \frac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0} dr = \varphi_R + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} \left(1 + \frac{1}{2\varepsilon} \right).$$

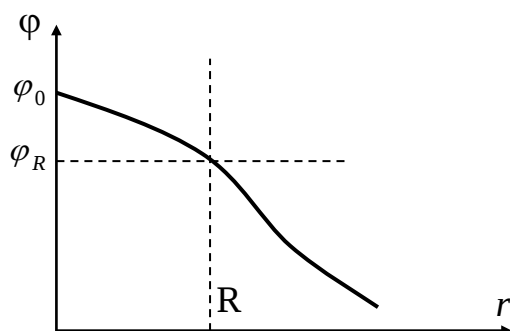


Рис. 3.7

Нарисуем график зависимости $\varphi(r)$ (см. рис. 3.7).

Наконец, найдём численные значения φ_R и φ_0 :

$$\varphi_R = 377 \text{ В},$$

$$\varphi_0 = 472 \text{ В}.$$

Задачи, рекомендуемые для решения в аудитории

1. Три отрицательных заряда по 9 нКл каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд нужно поместить в центре треугольника, чтобы система находилась в равновесии?

Ответ: $q = 5,2 \text{ нКл}$.

2. Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\sigma = 1 \text{ нКл/м}^2$. Найти напряженность электрического поля в геометрическом центре полусферы.

Ответ: $E = 28,8 \text{ В/м}$.

3. Круглая пластинка радиусом $a = 8 \text{ см}$ равномерно заряжена с поверхностной плотностью $\sigma = 150 \text{ мКл/м}^2$. Определить напряженность поля в точке, лежащей на расстоянии $b = 6 \text{ см}$ от пластинки на перпендикуляре к плоскости пластинки, проходящем через ее геометрический центр.

Ответ: $E = 3,39 \cdot 10^6 \text{ В/м}$.

4. Тонкий стержень длиной $l = 10 \text{ см}$ несет равномерно распределенный заряд $q = 1 \text{ нКл}$. Определить потенциал электрического поля в точке, лежащей на оси стержня на расстоянии $a = 20 \text{ см}$ от ближайшего его конца.

Ответ: $\varphi = 36,5 \text{ В}$.

5. Металлический шар имеет заряд $q_1 = 0,1 \text{ мКл}$. На расстоянии, равном радиусу шара от его поверхности, находится конец нити, вытянутой вдоль силовой линии. Нить несет равномерно распределенный по длине заряд $q_2 = 10 \text{ нКл}$. Длина нити равна радиусу шара. Определить силу, действующую на нить, если радиус шара $R = 10 \text{ см}$.

Ответ: $F = 150 \text{ мкН}$

6. Начертить графики зависимости напряженности поля E и потенциала φ от расстояния r до центра шара для следующего случая: металлический шар с радиусом $R = 10 \text{ см}$ имеет заряд $q = 60 \text{ нКл}$ и окружен ди-

электриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$, причем диэлектрик простирается до сферы радиуса $R_2 = 20$ см.

7. Металлический шар радиусом R_1 , несущий заряд q , окружён расположенным концентрически полым металлическим шаром с внутренним радиусом R_2 и внешним R_3 . Заряд внешнего шара равен нулю. Построить график зависимости напряженности поля E от расстояния r до центра шаров. Найти потенциал шаров, если в бесконечности потенциал равен нулю.

8. Две концентрические металлические сферы радиусов $R_1 = 4$ см и $R_2 = 10$ см имеют соответственно заряды $q_1 = -2$ нКл и $q_2 = 3$ нКл. Пространство между сферами заполнено эбонитом ($\varepsilon = 3$). Определить потенциал φ электрического поля на расстояниях $r_1 = 2$ см, $r_2 = 6$ см и $r_3 = 20$ см от центра сфер.

Ответ: $\varphi_1 = 0$ В, $\varphi_2 = 50$ В, $\varphi_3 = 45$ В.

Домашнее задание

1. Два шарика одинакового радиуса и массы, подвешенные на нитях одинаковой длины, опускаются в жидкий диэлектрик, плотность которого ρ_1 и диэлектрическая проницаемость ε . Какова должна быть плотность ρ материала шариков, чтобы углы расхождения нитей в воздухе и в диэлектрике были одинаковыми?

2. Два точечных заряда 6,7 нКл и 13,2 нКл находятся на расстоянии 6 см друг от друга. Найти напряженность электрического поля в точке, расположенной на расстоянии 3 см от первого заряда и 4 см от второго.

3. В трех вершинах квадрата со стороной 40 см находятся положительные одинаковые заряды по 5 нКл каждый. Найти напряженность поля в четвертой вершине.

4. Полуокружность радиуса $R = 2$ м равномерно заряжена зарядом $q = 10^{-9}$ Кл. Определить напряженность электрического поля, созданного этим зарядом в геометрическом центре полуокружности.

5. В вершинах квадрата расположены точечные заряды 10,33; -0,66; 0,99; -1,32 нКл. Определить потенциал поля в центре квадрата, если его диагональ равна 20 см.

6. Шарик, имеющий массу 0,4 г и заряд 4,9 нКл, подвешен на нити в поле плоского конденсатора, заряд которого 4,43 нКл и площадь пластин 50 см^2 . На какой угол от вертикали отклонится при этом нить с шариком?

7. Тонкое кольцо радиуса $R = 8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/см. Какова напряженность электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 10$ см?

8. В центр квадрата, в вершинах которого находится по заряду в 20 нКл, помещен отрицательный заряд. Найти величину этого заряда, если результирующая сила, действующая на каждый заряд, равна нулю.

9. Тонкий стержень длиной $l = 12$ см заряжен с линейной плотностью $\tau = 200$ нКл/м. Найти напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 5$ см от стержня, против его середины.

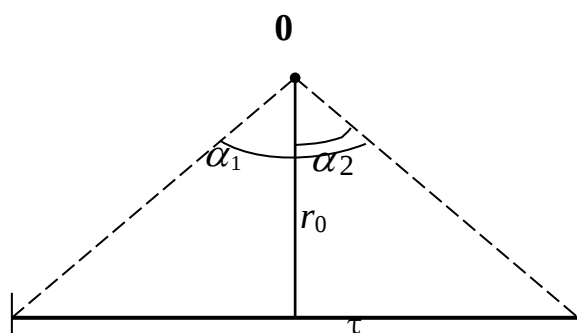


Рис. 3.8

10. Определить напряженность поля отрезка, равномерно заряженного с линейной плотностью τ , в точке О, удаленной от отрезка на расстояние r_0 . Углы α_1 и α_2 , заданы (см. рис.3.8).

11. Тонкий стержень длиной 20 см равномерно заряжен с линейной плотностью 1 нКл/см. Определить напряженность поля, созданного стержнем в точке А на продолжении его оси, на расстоянии

10 см от ближнего конца, и силу взаимодействия стержня и заряда 10^{-8} Кл, если его поместить в точку А.

12. На отрезке тонкого прямого проводника длиной $l = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 3$ мКл/м. Вычислить напряженность, создаваемую этим зарядом в точке, расположенной на оси проводника и удаленной от ближайшего конца отрезка на расстояние, равное длине этого отрезка. Диэлектрик - воздух.

13. Прямая бесконечная нить, равномерно заряженная электричеством с линейной плотностью $\tau_1 = 3 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, и отрезок длины $l = 20$ см, равномерно заряженный электричеством с линейной плотностью $\tau_2 = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл/м, расположены в одной плоскости перпендикулярно друг к другу на расстоянии $r_0 = 10$ см. Определить силу взаимодействия между ними.

14. Прямая тонкая бесконечная нить несет равномерно распределенный по длине заряд ($\tau_1 = 1$ мКл/м). В плоскости, содержащей нить, перпендикулярно к нити находится тонкий стержень длиной l . Ближайший к нити конец стержня находится на расстоянии l от нее. Определить силу, действующую на стержень, если он заряжен с линейной плотностью $\tau_2 = 0,1$ мКл/м.

15. Сто одинаковых капель ртути, заряженных до потенциала $\varphi = 20$ В, сливаются в одну большую каплю. Каков потенциал образовавшейся капли?

16. Электрическое поле создано бесконечной, прямой, равномерно заряженной нитью ($\tau = 0,3$ мКл/м). Определить поток N_E вектора напряженности через прямоугольную площадку, две большие стороны которой параллельны заряженной нити и одинаково удалены от нее на расстояние $r = 20$ см. Стороны площадки имеют размеры $a = 20$ см, $b = 40$ см.

17. Имеются две металлические концентрические сферы, радиусы которых 5 и 10 см и заряды $2 \cdot 10^{-8}$ и -10^{-8} Кл. Определить напряженность поля, созданного этими сферами, в точках, отстоящих от центров сфер на расстояния 3, 8 и 14 см. Построить график зависимости напряженности поля от расстояния точки от центра сфер.

18. Металлический заряженный шар радиусом $R = 5$ см окружен сферическим слоем диэлектрика толщиной $d = 5$ см. Диэлектрическая проницаемость слоя $\varepsilon = 3$. Заряд шара $q = 3,6$ нКл. Найти напряженность поля в точках, лежащих на расстояниях $r_1 = 6$ см и $r_2 = 12$ см от центра шара.

19. Два бесконечных тонкостенных коаксиальных цилиндра радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 10$ см равномерно заряжены электричеством с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 10$ нКл/м² и $\sigma_2 = -3$ нКл/м². Пространство между цилиндрами заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). Определить напряженность поля в точках, находящихся на расстояниях $r_1 = 2$ см, $r_2 = 6$ см и $r_3 = 15$ см от оси цилиндров.

20. Большая плоская пластина толщиной $\alpha = 1$ см несет заряд, равномерно распределенный с объемной плотностью $\rho = 100$ нКл/м³. Найти напряженность электрического поля вблизи центральной части пластины, вне нее, на малом расстоянии от ее поверхности.

21. Длинный парафиновый цилиндр радиусом $R = 2$ см несет заряд, равномерно распределенный по объему с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определить напряженность электрического поля в точках, находящихся от оси цилиндра на расстояниях: 1) $r_1 = 1$ см, 2) $r_2 = 3$ см. Обе точки равноудалены от концов цилиндра. Построить график зависимости $E(r)$.

22. Бесконечно длинная тонкая прямая нить несет равномерно распределенный по длине нити заряд с линейной плотностью $\tau = 0,01$ мкКл/м. Определить разность потенциалов двух точек поля, удаленных от нити на $r_1 = 2$ см и $r_2 = 4$ см.

23. Сплошной шар из диэлектрика ($\varepsilon = 3$) радиусом $R = 10$ см заряжен с объемной плотностью $\rho = 50$ нКл/м³. Напряженность электрического поля внутри и на поверхности такого шара выражается формулой $E = \rho r / 3\varepsilon\varepsilon_0$, где r - расстояние от центра шара до точки, в которой вычисляется напряженность поля. Вычислить разность потенциалов между центром шара и точками, лежащими на его поверхности.

24. Эбонитовый толстостенный шар ($\varepsilon = 3$) несет равномерно распределенный по объему заряд с объемной плотностью $\rho = 2$ мкКл/м³. Внутренний радиус шара $R_1 = 3$ см, наружный $R_2 = 5$ см. Определить потенциал шара в следующих точках: 1) на наружной поверхности шара, 2) на внутренней поверхности шара, 3) в центре шара.

25. Две металлические концентрические сферы имеют радиусы R_1 и R_2 . На внутренней сфере находится заряд q_1 , на внешней - заряд q_2 . Найти напряженность E и потенциал φ поля вне сфер, а также внутри малой и большой сфер.

3.1.2. Работа сил электростатического поля.
Емкость проводников и конденсаторов.
Энергия электростатического поля
Основные формулы

1. Работа, совершаемая силами электростатического поля по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A = q (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы электростатического поля в точках 1 и 2, или

$$A = \int_1^2 F_l dl = q \int_1^2 E_l dl,$$

где E_l - проекция вектора напряженности $\vec{E}$ на направление $d\vec{l}$. При этом интегрирование производится вдоль любой линии, соединяющей точки 1 и 2.

2. Емкость уединенного проводника

$$C = q / \varphi,$$

где q - заряд проводника, φ - его потенциал.

3. Емкость шара радиусом R

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$

4. Емкость плоского конденсатора

$$C = \epsilon\epsilon_0 S / d,$$

где S - площадь пластин конденсатора, d - расстояние между пластинами.

5. Емкость сферического конденсатора

$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

где r_1 и r_2 - радиусы сферических обкладок конденсатора.

6. Емкость параллельно соединенных конденсаторов

$$C = \sum_{i=1}^n C_i.$$

7. Емкость последовательно соединенных конденсаторов

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i},$$

где C_i - емкость отдельного конденсатора, n - число конденсаторов в батарее.

8. Собственная энергия заряженного проводника

$$W = C\varphi^2 / 2 = q\varphi / 2 = q^2 / 2C,$$

где C - емкость проводника, q и φ - его заряд и потенциал.

9. Собственная энергия заряженного конденсатора

$$W = CU^2 / 2 = qU / 2 = q^2 / 2C,$$

где U - разность потенциалов на обкладках конденсатора, q - заряд одной из обкладок, C - емкость.

10. Энергия электростатического поля

$$W = \int_V \omega dV,$$

где V - объем, занимаемый полем, ω - объемная плотность энергии поля:

$$\omega = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 / 2.$$

11. Энергия системы неподвижных точечных зарядов

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \varphi_i,$$

где φ_i - потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме i -го, в той точке, где находится заряд q_i .

Примеры решения задач

Задача 1. Определить работу электростатических сил по перемещению заряда $q = 1$ нКл из точки A в точку B и из точки C в точку D , если $r = 6$ см, $a = 8$ см, $q_1 = 3,33$ нКл, $q_2 = -3,33$ нКл (см. рис.3.9).

Решение

1. Работа силы со стороны электрического поля по перемещению заряда q из точки A в точку B :

$$A_{AB} = q (\varphi_A - \varphi_B). \quad (1)$$

Здесь φ_A и φ_B - потенциалы поля, образованного зарядами q_1 и q_2 в точках A и B . Согласно принципу суперпозиции полей:

$$\varphi_A = \varphi_{A_1} + \varphi_{A_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2};$$

$$\varphi_B = \varphi_{B_1} + \varphi_{B_2} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1},$$

где $r_1 = r$, $r_2 = \sqrt{r^2 + a^2}$.

Подставляя φ_A , φ_B , r_1 и r_2 в уравнение (1), находим

$$\begin{aligned} A_{AB} &= q \left[\left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + a^2}} \right) - \left(\frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + a^2}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \right) \right] = \\ &= \frac{q(q_1 - q_2)(\sqrt{r^2 + a^2} - r)}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r \sqrt{r^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

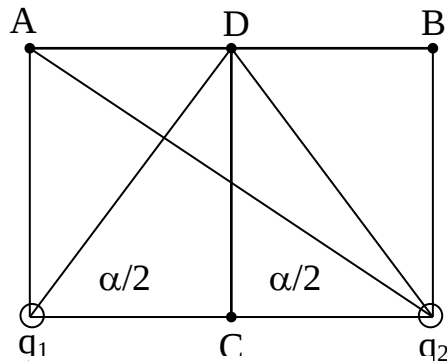


Рис. 3.9

$$A_{AB} = 0,8 \text{ мкДж}.$$

2. Работа по перемещению заряда q из точки C в точку D

$$A_{CD} = q (\varphi_C - \varphi_D). \quad (2)$$

Здесь φ_C и φ_D - потенциалы поля, образованного зарядами q_1 и q_2 в точках C и D .

$$\varphi_C = \varphi_{C_1} + \varphi_{C_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_3},$$

$$\varphi_D = \varphi_{D_1} + \varphi_{D_2} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_4} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_4},$$

где $r_3 = a/2$, $r_4 = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$.

Подставляя выражения для φ_C , φ_D , r_3 и r_4 в уравнение (2), получаем

$$A_{CD} = \frac{2q(q_1 + q_2)(\sqrt{r^2 + a^2/4} - a/2)}{4\pi\epsilon\epsilon_0 \sqrt{r^2 + a^2/4}}.$$

Так как $q_1 = -q_2$, то $(q_1 + q_2) = 0$ и $A_{CD} = 0$.

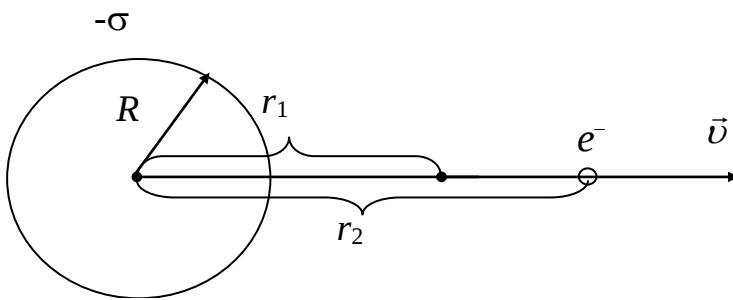


Рис. 3.10

Задача 2. В поле, созданном заряженной сферой радиусом 10 см, движется электрон по радиусу между точками, находящимися на расстояниях 12 и 15 см от центра сферы (см. рис.3.10). При этом скорость электрона изменяется от $2 \cdot 10^5$ м/с до $2 \cdot 10^6$ м/с.

Найти поверхностную плотность заряда сферы.

Решение

При движении электрона электрическое поле совершает работу, равную изменению его кинетической энергии:

$$A = \Delta W_K,$$

$$A = \frac{m}{2} (V_2^2 - V_1^2). \quad (3)$$

С другой стороны,

$$A = \int_{r_1}^{r_2} (\vec{F} d\vec{r}) = \int_{r_1}^{r_2} |e| \cdot E \cos \alpha dr,$$

где E - напряженность на расстоянии r от сферы с зарядом q , e -заряд электрона.

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2},$$

причем, $q = \sigma \cdot 4\pi R^2$; $\cos\alpha = 1$.

Отсюда

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \frac{|e|\sigma 4\pi R^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{\sigma R^2 |e|(r_2 - r_1)}{\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2}. \quad (4)$$

Приравнивая правые части выражений (3) и (4), получим

$$\frac{m}{2} (V_2^2 - V_1^2) = \frac{\sigma R^2 |e|(r_2 - r_1)}{\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2}.$$

Отсюда находим, что поверхностная плотность заряда равна:

$$\sigma = \frac{\epsilon\epsilon_0 r_1 r_2 m (V_2^2 - V_1^2)}{2R^2 |e|(r_2 - r_1)}.$$

Подставляя численные значения величин, получим

$$\sigma = 6 \text{ нКл/м}^2.$$

Задача 3. Определить емкость сферического конденсатора (рис. 11) с радиусами обкладок R_1 и R_2 (причем $R_2 > R_1$), который заполнен изотропным диэлектриком с проницаемостью, изменяющейся по закону $\epsilon = a / r^2$, где a - постоянная, r - расстояние от центра конденсатора.

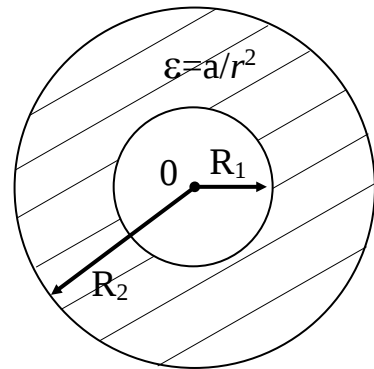


Рис. 3.11

Решение

По методу Гаусса рассчитаем напряженность поля внутри диэлектрика, внутренняя обкладка которого имеет заряд q :

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Разность потенциалов между обкладками

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} (R_2 - R_1).$$

Следовательно, емкость такого сферического конденсатора равна:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 a}{R_2 - R_1}.$$

Задача 4. Управляющие пластины в электронно-лучевой трубке образуют плоский конденсатор. Расстояние между пластинами $d = 10$ мм, длина стороны пластины $l = 5$ см. На пластины подана разность потенциа-

лов $U = 50 \text{ В}$. На расстоянии $d/2 = 5 \text{ мм}$ от пластин в конденсатор влетает параллельно пластинам электрон со скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$. Какой будет форма траектории электрона внутри конденсатора? На какое расстояние h от первоначального направления сместится электрон к моменту вылета из конденсатора?

Решение

Напряженность однородного поля внутри плоского конденсатора равна:

$$E = U/d.$$

На электрон в вертикальном направлении действует сила

$$F = eE,$$

которая сообщает электрону вертикальное ускорение

$$a = F / m = eU / md, \quad (5)$$

где e и m - заряд и масса электрона.

Движение электрона в поле плоского конденсатора можно отождествить с движением тела, брошенного горизонтально в поле силы тяжести Земли. В направлении оси X движение электрона равномерное:

$$X = l = v_x \cdot t, \quad (6)$$

а в направлении оси Y – равноускоренное (траектория движения электрона показана на рис.3.12) с нулевой начальной скоростью ($v_{0y} = 0$):

$$v_y = at; \quad y = h = at^2/2. \quad (7)$$

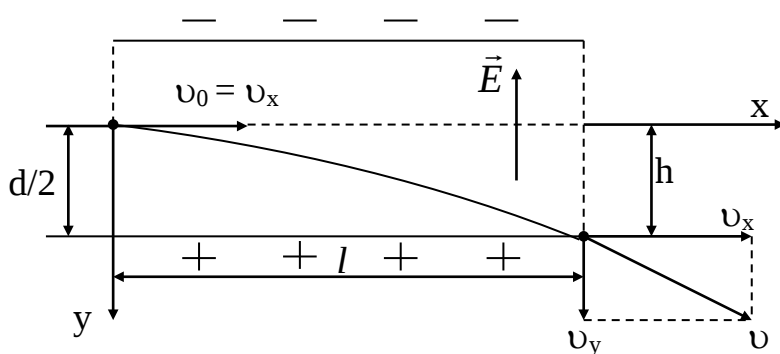


Рис. 3.12

Совместное решение уравнений (5), (6), (7) позволяет определить, что к моменту вылета из конденсатора электрон сместится от первоначального направления на расстояние

$$h = \frac{eUl^2}{2mdv_0^2}.$$

Подставляя численные значения величин, получим

$$h = 2,8 \text{ мм}.$$

Задача 5. Рассчитать энергию поля, созданного зарядом q , равномерно распределенным в вакууме по объёму, имеющему форму шара радиусом R . Найти изменение энергии при разделении заряда q на два заряда $q/2$, бесконечно удаленных один от другого. После разделения каждый из заря-

дов $q/2$ распределяется с той же объемной плотностью по объему, имеющему форму шара.

Решение

Заряд q создает электрическое поле как в области, занятой самим зарядом, так и вне нее. Полная энергия электрического поля

$$W = \int_V \omega dV, \quad (8)$$

где ω - объемная плотность энергии электрического поля:

$$\omega = \varepsilon_0 E^2 / 2. \quad (9)$$

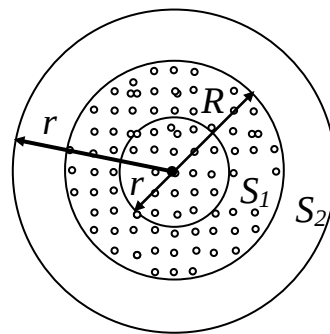
Таким образом, решение задачи сводится к нахождению напряженности поля, созданного данной конфигурацией зарядов.

Идеальная сферическая симметрия позволяет найти напряженность поля с помощью теоремы Гаусса:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \sum q / \varepsilon_0, \quad (10)$$

где S - площадь вспомогательной поверхности, которой, очевидно, следует придать форму сферы, концентрической рассматриваемому заряду.

После разделения заряда аналогично может быть найдена энергия поля, создаваемого каждым из зарядов $q/2$. Поскольку в условии оговорено, что после разделения заряды бесконечно удалены один от другого, их взаимодействием, а значит, и их взаимной энергией можно пренебречь. При разделении заряда силы поля совершают положительную работу (одноименные заряды отталкиваются), энергия системы уменьшается.



Для расчета напряженности проведем вспомогательные поверхности S_1 и S_2 (см. рис). Во всех точках каждой из этих поверхностей (считаем заряд q положительным) $E = E_n = \text{const}$. Поэтому

$$\oint_{S_{1,2}} (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_{S_{1,2}} E_n dS = E \cdot 4\pi r^2, \quad (11)$$

где r - радиус вспомогательной поверхности.

При $r < R$ сумма зарядов, охваченных поверхностью S_1 , равна:

$$\sum q = 4\pi r^3 \rho / 3,$$

где $\rho = 3q/4\pi R^3$ - объемная плотность заряда. Следовательно,

$$\sum q = qr^3 / R^3. \quad (12)$$

Подставляя выражения (11) и (12) в (10), находим

$$E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}. \quad (13)$$

При $r > R$ сумма зарядов, охваченных поверхностью S_2 , равна:

$$\sum q = q. \quad (14)$$

Подставляя выражения (14) и (11) в (10), получаем

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (15)$$

В соответствии с выражениями (13), (15) и (9) объемная плотность энергии также является функцией расстояния:

$$\omega = \frac{q^2 r^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R^6} \quad (r < R),$$

$$\omega = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^7} \quad (r > R).$$

Поскольку зависимость $\omega(r)$ различна для областей пространства внутри и вне заряда q , интеграл в правой части уравнения (8) следует разбить на два:

$$W = \int_{V_1} \omega dV + \int_{V_2} \omega dV, \quad (16)$$

где V_1 - объем пространства, занимаемый зарядом, V_2 - объем остального пространства.

Объем dV следует выбирать в виде тонкого шарового слоя толщиной dr (в пределах такого объема E и ω постоянны).

Подставляя это выражение и соответствующие выражения для ω в (16) и учитывая, что в пределах объема V_1 переменная r изменяется от 0 до R , а в пределах объема V_2 - от R до ∞ , окончательно получим

$$W = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R^6} \int_0^R r^4 dr + \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \right] = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R}. \quad (17)$$

Очевидно, что после разделения заряда энергию поля каждого из вновь образовавшихся зарядов можно рассчитать по формуле (17), но теперь $q_1 = q/2$, $R_1 = R\sqrt[3]{2}$.

Тогда энергия всей системы после разделения заряда

$$W' = 2 \frac{3}{20\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(q/2)^2 \sqrt[3]{2}}{R} = \frac{3\sqrt[3]{2}q^2}{40\pi\epsilon_0 R}.$$

Изменение энергии при разделении зарядов:

$$\Delta W = W' - W = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2} - 1 \right) < 0.$$

Задачи, рекомендуемые для решения на аудиторных занятиях

1. Заряды каждой из пластин плоского конденсатора находятся под воздействием электрического поля, создаваемого зарядами другой пластины. Напряженность такого поля $E = q/2\epsilon_0 S$, где q - заряд и S - площадь пластин конденсатора. Зная q и S , определить, с какой силой F притягиваются друг к другу пластины конденсатора. Какую работу A необходимо совершить, чтобы раздвинуть пластины конденсатора на расстояние d ? Выразить эту работу через: а) емкость C конденсатора и разность потенциалов U , б) емкость C конденсатора и заряд q пластин.

2. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком (фарфор с диэлектрической проницаемостью ϵ), объем которого $V = 100 \text{ см}^3$. Поверхностная плотность заряда на пластинах конденсатора $\sigma = 8,85 \text{ нКл/м}^2$. Вычислить работу A , которую необходимо совершить для того, чтобы удалить диэлектрик из конденсатора. Трением диэлектрика о пластины конденсатора пренебречь.

Ответ: $A = 3,7 \text{ пДж}$.

3. По поверхности двух концентрических проводящих сфер с радиусами $R_1 = 5 \text{ см}$ и $R_2 = 10 \text{ см}$ равномерно (с одинаковой плотностью σ) распределен некоторый заряд. Найти заряд q , если для переноса положительного единичного заряда из бесконечности в центр сфер требуется совершить работу $A = 3 \text{ кДж}$.

Ответ: $q = 27,7 \text{ нКл}$.

4. Шар радиусом $R_1 = 5 \text{ см}$, имеющий заряд $q_1 = 20 \text{ нКл}$, и шар радиусом $R_2 = 10 \text{ см}$, имеющий такой же заряд $q_2 = 20 \text{ нКл}$, расположены на достаточно большом расстоянии друг от друга. Шары соединяются проволокой. В каком направлении будут перемещаться заряды по проволоке? Какой заряд q переместится с одного шара на другой? Каковы будут общий потенциал ϕ и заряды q'_1 и q'_2 шаров после соединения?

Ответ: $q = 6,67 \text{ нКл}$, $\phi = 2,4 \text{ кВ}$, $q'_1 = 13,33 \text{ нКл}$, $q'_2 = 26,67 \text{ нКл}$.

5. Накаленная нить радиолампы испускает электроны, которые под действием электрического поля движутся к цилиндру, по оси которого натянута нить. Цилиндр и нить сделаны из одного и того же металла. Их диаметры равны соответственно 10 и 0,1 мм. Напряжение между цилиндром и нитью равно 91 В. Начальная скорость электрона мала. Определить ускорение и скорость электронов в точке, отстоящей от нити на расстоянии 3,5 мм.

Ответ: $a = 10^{15} \text{ м/с}^2$, $V = 5 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.

6. Одной из пластин плоского конденсатора площадью $S = 0,2 \text{ м}^2$ сообщили заряд $q = 10^{-9} \text{ Кл}$ (другая соединена с Землей). Расстояние между пластинами $d = 2 \text{ мм}$. Между пластинами (параллельно им) находятся стеклянная и фарфоровая пластинки, толщины которых соответственно равны $\alpha_1 = 0,5 \text{ мм}$ и $\alpha_2 = 1,5 \text{ мм}$. Определить напряженности электрического поля в стекле и фарфоре, а также поверхностные плотности σ' и σ'' связанных зарядов на них.

Ответ: $E_1 = E_2 = 94,16 \text{ В/м}$, $\sigma' = \sigma'' = 4,17 \text{ нКл/м}^2$

7. Воздушный конденсатор емкостью $C_1 = 0,2 \text{ мкФ}$ заряжен до разности потенциалов $U = 600 \text{ В}$. Найти изменение энергии конденсатора и работу сил поля при заполнении конденсатора жидким диэлектриком ($\varepsilon = 2$). Расчет произвести для двух случаев: 1) конденсатор отключен от источника; 2) конденсатор соединен с источником.

Ответ: 1) $\Delta W = -18 \text{ мДж}$, $A = 18 \text{ мДж}$;
2) $\Delta W = 36 \text{ мДж}$, $A = 36 \text{ мДж}$.

8. Конденсатор емкостью $C_1 = 540 \text{ пф}$ зарядили до разности потенциалов $U = 1,5 \text{ кВ}$ и отключили от источника напряжения. Затем к конденсатору присоединили параллельно второй, незаряженный конденсатор емкостью $C_2 = 360 \text{ пф}$. Какое количество энергии, запасенной в первом конденсаторе, было израсходовано на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов?

Ответ: $\Delta W = 0,24 \text{ мДж}$.

9. Уединенный металлический шар радиусом $R = 6 \text{ см}$ несет некоторый заряд. Концентрическая этому шару поверхность делит пространство на две части (внутренняя конечная и внешняя бесконечная), так что энергии электрического поля обеих частей одинаковы. Определить радиус этой сферы.

Ответ: $r = 12 \text{ см}$.

Домашнее задание

1. На расстоянии 50 см от поверхности шара радиусом 9 см , заряженного до потенциала 25 кВ , находится точечный заряд 10^{-8} Кл . Какую работу надо совершить для уменьшения расстояния между шаром и зарядом до 20 см ?

2. В электрическом поле потенциалы точек M и N равны: $\varphi_M = 0,3 \text{ кВ}$ и $\varphi_N = 1,2 \text{ кВ}$. Какую работу A необходимо совершить для того, чтобы положительный заряд $q = 30 \text{ нКл}$ переместить из точки M в точку N ?

3. Электрическое поле образовано положительно заряженной бесконечной нитью с линейной плотностью заряда в $2 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/см}$. Какую ско-

рость получит электрон под действием поля, приблизившись к нити с расстояния в 1 см до расстояния 0,5 см от нити?

4. Бесконечная плоскость заряжена отрицательно с поверхностной плотностью $\sigma = 36,4 \text{ нКл/м}^2$. По направлению силовой линии поля, созданного плоскостью, летит электрон. Определить минимальное расстояние, на которое может подойти к плоскости электрон, если на расстоянии $l_0 = 5 \text{ см}$ он имел кинетическую энергию $W_k = 80 \text{ эВ}$.

5. В поле, созданном заряженной сферой радиусом 10 см, движется электрон по радиусу между точками, находящимися на расстояниях 12 и 15 см от центра сферы. При этом скорость электрона изменяется от $2 \cdot 10^5$ до $2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$. Найти поверхностную плотность заряда сферы.

6. Протон и α - частица, двигаясь с одинаковой скоростью, влетают в плоский конденсатор параллельно пластинам. Во сколько раз отклонение протона полем конденсатора будет больше отклонения α - частицы?

7. Электрон влетает в плоский воздушный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $6 \cdot 10^7 \text{ м/с}$. Расстояние между пластинами 1 см, разность потенциалов 600 В. Найти отклонение электрона, вызванное полем конденсатора, если длина его пластин 5 см.

8. В пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью, направленной параллельно пластинам, влетают в одном случае электрон, а в другом - отрицательный ион. Начальную кинетическую энергию ион и электрон получили, пройдя одинаковую разность потенциалов U_0 . Расстояние между пластинами a . Какая из частиц, электрон или ион, пройдет до попадания на положительную пластину больший путь, если и та и другая влетают посредине расстояния между пластинами?

9. Пылинка массой $m = 10^{-12} \text{ кг}$ падает между пластинами плоского конденсатора на одинаковом расстоянии от них. Из-за сопротивления воздуха скорость пылинки постоянна и равна 1 мм/с. Конденсатор подключают к источнику напряжения 490 В, и через время 10 с пылнка достигает одной из пластин. Определить заряд пылинки. Расстояние между пластинами конденсатора 0,1 м. Силу сопротивления считать пропорциональной скорости пылинки.

10. Напряженность электрического поля в плоском конденсаторе $E = 60 \text{ кВ/м}$. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 5 \text{ см}$. Электрон летит вдоль линии напряженности от одной пластины конденсатора к другой. Начальная скорость электрона $V_0 = 0$. Какую скорость V приобретает электрон на этом пути за счет работы сил электрического поля?

11. Радиус внутреннего шара воздушного сферического конденсатора $R_1 = 1 \text{ см}$, радиус внешнего шара $R_2 = 4 \text{ см}$. Между шарами приложена разность потенциалов $U = 3000 \text{ В}$. Найти напряженность электрического поля на расстоянии $X = 3 \text{ см}$ от центра шаров.

12. Плоский конденсатор, между обкладками которого помещена стеклянная пластинка ($\epsilon = 6$) толщиной $d = 2$ мм, заряжен до напряжения $U = 200$ В. Пренебрегая величиной зазора между пластинкой и обкладками, найти поверхностную плотность σ свободных зарядов на обкладках конденсатора, а также поверхностную плотность σ' связанных зарядов (зарядов поляризации) на стекле.

13. Конденсатор емкостью $C_1 = 3$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 300$ В, конденсатор емкостью $C_2 = 2$ мкФ - до $U_2 = 200$ В. Оба конденсатора соединены после зарядки параллельно одноименными полюсами. Какая разность потенциалов U установится на пластинах конденсаторов после их соединения?

14. На пластины плоского конденсатора помещен заряд q . Площадь пластин S , расстояние между ними d .

а) Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами на d ?

б) Какую работу нужно совершить, чтобы сдвинуть пластины на расстояние X друг относительно друга? Расстояние между пластинами остается неизменным. Пластины имеют форму квадратов.

в) Какая совершается работа в случаях а) и б), если между пластинами конденсатора поддерживается батареей постоянная разность потенциалов? Почему эти работы будут другими?

15. Пластины плоского конденсатора изолированы друг от друга слоем диэлектрика. Конденсатор заряжен до разности потенциалов 1 кВ и отключен от источника напряжения. Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если при его удалении разность потенциалов между пластинами конденсатора возрастает до 3 кВ.

16. Заряженный шар A радиусом 2 см приводится в соприкосновение с незаряженным шаром B , радиус которого 3 см. После того как шары разъединили, энергия шара B оказалась равной 0,4 Дж. Какой заряд был на шаре A до их соприкосновения?

17. Плоский конденсатор заряжен до некоторой разности потенциалов. В конденсатор вдвинули диэлектрическую пластинку. После этого для восстановления прежней разности потенциалов пришлось увеличить заряд конденсатора в три раза. Найти диэлектрическую проницаемость ϵ пластинки.

18. Как изменится энергия заряженного плоского воздушного конденсатора ($\epsilon = 1$) при уменьшении расстояния между его пластинами? Рассмотреть два случая: 1) конденсатор отключен от источника напряжения, 2) конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения.

19. Уединенная металлическая сфера емкостью $C = 10$ пФ заряжена до потенциала $\varphi = 3$ кВ. Определить энергию поля, заключенного в сферическом слое, ограниченном сферой в концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в три раза больше радиуса сферы.

20. Эбонитовый шар радиусом R равномерно заряжен электричеством с объемной плотностью ρ . Сфера какого радиуса R_1 делит шар на две части, энергии которых равны?

21. Объемная плотность энергии электрического поля внутри заряженного плоского конденсатора с твердым диэлектриком ($\epsilon=6$) равна 25 Дж/м³. Найти давление, производимое пластинами площадью $S = 20$ см² на диэлектрик, а также силу F , которую необходимо приложить к пластинам для их отрыва от диэлектрика

22. Плоский конденсатор, площадь каждой пластины которого $S = 400$ см², заполнен двумя слоями диэлектрика. Граница между ними параллельна обкладкам. Первый слой - прессшпан ($\epsilon = 2$) толщины $l_1 = 0,2$ см, второй слой - стекло ($\epsilon = 7$) толщины $l_2 = 0,3$ см. Конденсатор заряжен до разности потенциалов $U = 600$ В. Найти энергию конденсатора.

23. Найти энергию электрического поля следующих конденсаторов, заряженных до разности потенциалов U :

а) плоского конденсатора с площадью пластин S , расположенных на расстоянии d друг от друга, если площадь пластин 1 м², расстояние 1 мм, разность потенциалов между пластинами 1 кВ; б) сферического конденсатора с радиусами сфер r_1 и r_2 ; в) цилиндрического конденсатора длины l , с радиусами обкладок r_1 и r_2 .

24. Батарея конденсаторов (см. рис.3.14) заряжена до разности потенциалов $U_0 = 200$ В, после чего отключена от источника напряжения. Как изменится энергия батареи при замыкании ключа K , если $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = 1$ мкФ, $C_4 = 0,5$ мкФ?

25. Сплошной парафиновой шар ($\epsilon=2$) радиуса $R = 10$ см заряжен равномерно по объему с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определить энергию W_1 электрического поля, сосредоточенную в шаре, и энергию W_2 вне него.

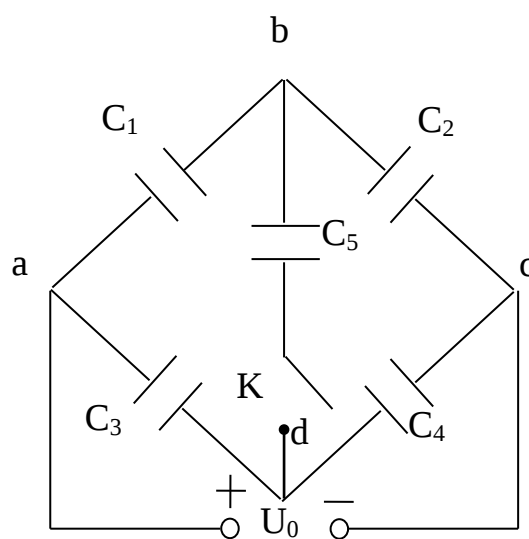


Рис. 3.14

Варианты индивидуального задания

№ варианта	Тема 1	Тема 2
1.	1,25,7	1,15,25
2.	2,24,9	2,10,20
3.	3,23,10	3,13,19
4.	4,22,15	4,21,16
5.	5,21,12	5,14,24
6.	6,20,13	6,11,23
7.	7,19,1	7,2,18
8.	8,18,24	8,16,1
9.	9,17,15	9,12,25
10.	10,16,22	10,3,22
11.	11,25,8	11,4,18
12.	12,24,6	12,7,24
13.	13,23,2	13,5,20
14.	14,22,3	14,6,19
15.	15,21,7	15,7,25
16.	16,1,23	16,5,22
17.	17,5,25	17,2,20
18.	18,3,11	18,4,11
19.	19,6,14	19,6,14
20.	20,7,5	20,8,15
21.	21,8,4	21,5,13
22.	22,15,9	22,6,11
23.	23,11,2	23,3,16
24.	24,13,1	24,9,1
25.	25,7,2	25,17,8

3.2. Постоянный ток

3.2.1. Законы постоянного тока

Основные формулы

1. Сила постоянного тока

$$I = Q / t,$$

где Q - заряд, прошедший через поперечное сечение проводника за время t .

2. Плотность тока

$$j = I / S,$$

где S - площадь поперечного сечения проводника.

3. Связь плотности тока со средней скоростью $\langle v \rangle$ направленного движения заряженных частиц

$$j = Qn \langle v \rangle,$$

где Q - заряд частицы; n - концентрация заряженных частиц.

4. Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи, не содержащего ЭДС,

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R},$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ - разность потенциалов на концах участка цепи, R - сопротивление участка.

5. Закон Ома для неоднородного участка цепи, содержащего ЭДС,

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) \pm \varepsilon}{R},$$

где ε - ЭДС источника тока; R - полное сопротивление участка (сумма внешних и внутренних сопротивлений).

Напряжением на участке цепи:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \varepsilon$$

называется алгебраическая сумма разности потенциалов и ЭДС, включенных на данном участке.

6. Закон Ома для замкнутой (полной) цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

где R - внешнее сопротивление цепи; r - внутреннее сопротивление цепи.

7. Сопротивление R и проводимость G проводника

$$R = \rho \cdot l / S, \quad G = \sigma \cdot S / l,$$

где ρ - удельное сопротивление; σ - удельная проводимость; l - длина проводника; S - площадь поперечного сечения проводника.

8. Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t),$$

где ρ_0 - удельное сопротивление при 0°C , α - температурный коэффициент сопротивления, t - температура по шкале Цельсия.

9. Сопротивление системы проводников:

а) при последовательном соединении:

$$R = \sum_i R_i,$$

б) при параллельном соединении:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i},$$

где R_i - сопротивление i -го проводника.

10. Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E},$$

где σ - удельная проводимость; $\vec{E}$ - напряженность электрического поля; $\vec{j}$ - плотность тока.

На что следует обратить внимание при решении задач

1. Интегральную форму закона Ома, как правило, удобно применять при расчетах, связанных с токами в проводах. Для вычисления же токов и сопротивлений проводящих безграничных сред практически незаменимой оказывается дифференциальная форма закона Ома.

2. Следует помнить, что если имеются несколько участков, содержащих различные э.д.с., то при одной и той же разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, напряжения в них будут различны. Величины напряжения и разности потенциалов совпадают только при отсутствии сторонних сил.

3. Чтобы безошибочно применять закон Ома для участка цепи, содержащего э.д.с., необходимо придерживаться следующих правил:

а) начертить схему, обозначить на ней полюсы всех источников, а также направление тока в цепи (если оно неизвестно, то предполагаемое),

б) э.д.с. считать положительной, если при мысленном движении вдоль пути по направлению тока сначала встречается отрицательный полюс источника, а затем положительный.

4. Часто требуется рассчитать сопротивление разветвленной цепи. В этом случае следует разбить эту цепь на участки с только последовательным и только параллельным сопротивлением проводников. Если это невозможно, то нужно заменить данную схему эквивалентной, основываясь на возможности соединения и разъединения точек цепи, имеющих равные потенциалы.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить плотность тока в медной проволоке длиной $l = 10$ м, если разность потенциалов на её концах $\varphi_1 - \varphi_2 = 12$ В.

Решение

Плотность тока, определяемую $j = I / S$, найдём, выразив силу тока I по закону Ома для участка однородной цепи:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}.$$

Учитывая, что $R = \rho \cdot l / S$ получаем

$$j = I / S = (\varphi_1 - \varphi_2) / (\rho \cdot l).$$

К такому же результату можно прийти, применив закон Ома в дифференциальной форме, предварительно выразив напряженность электрического поля внутри однородного проводника через разность потенциалов на его концах и его длину:

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2) / l.$$

Подставим это значение в $j = \sigma E$ и, учитывая, что $\sigma = 1 / \rho$, снова получим:

$$j = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\rho \cdot l}.$$

Проведя расчет плотности тока, получим

$$j = 7 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2.$$

Задача 2. Какой заряд пройдет по проводнику, если в течение 10 с сила тока уменьшилась от $I_0 = 10$ А до $I = 5$ А? Считать, что сила тока I , А уменьшалась равномерно.

Решение

Так как сила тока в проводнике изменяется в течение времени, то мгновенное значение силы тока

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Тогда полный заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время t , выражается интегралом

$$Q = \int_0^t I dt.$$

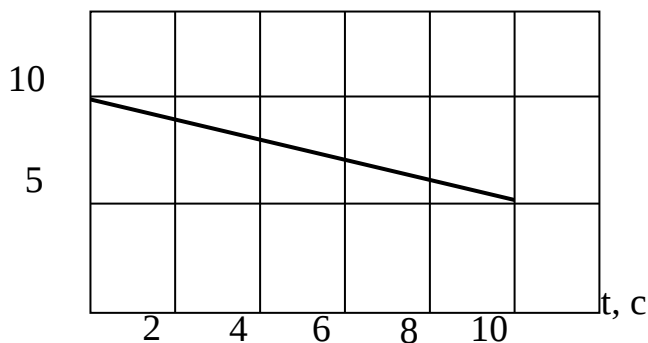


Рис. 3.15

Так как в задаче сказано, что сила тока равномерно уменьшалась, то её значение можно представить в виде линейной функции времени (рис. 3.15):

$$I = I_0 - k t,$$

где I, I_0 - конечное и начальное значения силы тока, k - скорость уменьшения силы тока:

$$k = \frac{I_0 - I}{t}.$$

Интегрируя и подставляя значения I_0, I, t , находим

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^t I dt = \int_0^t (I_0 - kt) dt = I_0 t - \frac{kt^2}{2} = I_0 t - \frac{(I_0 - I) \cdot t^2}{2 \cdot t} = \\ &= I_0 t - \frac{I_0}{2} t + \frac{I}{2} t = \frac{I + I_0}{2} \cdot t = 10 \text{ Кл}. \end{aligned}$$

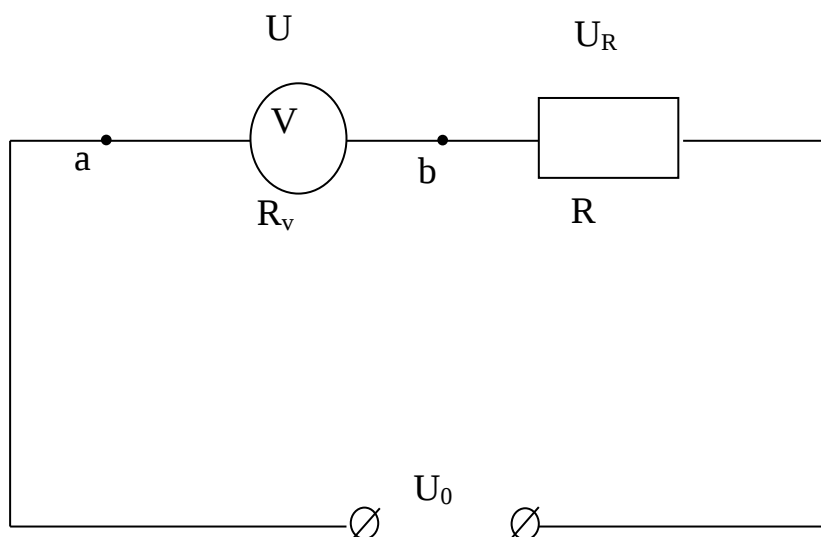


Рис. 3.16

Задача 3. Если вольтметр соединить последовательно с резистором сопротивлением $R = 10$ кОм, то при напряжении $U_0 = 120$ В он покажет $U_1 = 50$ В (рис. 3.16). Если соединить его последовательно с резистором сопротивлением R_x , то при том же напряжении U_0 вольтметр покажет $U_2 = 10$ В. Определить сопротивление R_x .

Решение

Данная цепь представляет последовательное соединение двух элементов - вольтметра и резистора. При последовательном соединении сила тока одинакова во всех участках цепи. Рассматриваемая цепь является однородной. Напряжения на отдельных участках такой цепи, совпадающие с разностями потенциалов на их концах и дающие в сумме напряжение на всей цепи, распределяются всегда пропорционально сопротивлениям участков, что следует из закона Ома. Заметим, что вольтметр измеряет разность потенциалов между теми точками, к которым он подключен (a и b , рис. 3.16). Поэтому для двух элементов цепи (резистора и вольтметра) можно составить пропорцию:

$$\frac{U_1}{R_V} = \frac{U_0 - U_1}{R},$$

где U_1 , R_V - напряжение на вольтметре и его сопротивление, $U_0 - U_1 = U_R$ - напряжение на резисторе с сопротивлением R .

Для случая, когда включен резистор с неизвестным сопротивлением, можно записать

$$\frac{U_2}{R_V} = \frac{U_0 - U_2}{R_x}.$$

Исключив из уравнений величину R_V , получим

$$R_x = \frac{(U_0 - U_2) \cdot U_1}{(U_0 - U_1) \cdot U_2} \cdot R = 79 \text{ кОм}.$$

Задача 4. Два гальванических элемента, имеющих э.д.с. $\varepsilon_1 = 1,5 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 1,6 \text{ В}$ и внутренние сопротивления $r_1 = 0,6 \text{ Ом}$, $r_2 = 0,4 \text{ Ом}$ соединены разноименными полюсами (рис.3.17). Пренебрегая сопротивлением соединительных проводов, определить разность потенциалов на зажимах элементов (между точками a и b).

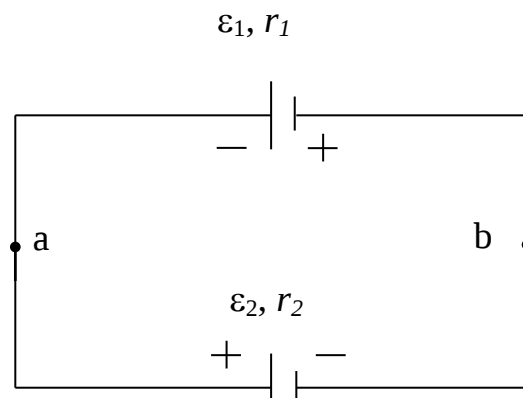


Рис. 3.17

Решение

Точки a и b являются концами двух участков цепи: $a - \varepsilon_1 - b$ и $a - \varepsilon_2 - b$.

Оба этих участка содержат э.д.с. и, следовательно, являются участками неоднородной цепи. Поэтому применим закон Ома для неоднородного участка цепи. Так как оба источника ЭДС имеют положительные знаки при обходе цепи по часовой стрелке (см. правило знаков, изложенное выше), ток по цепи будет течь в том же направлении. Тогда для участка $a - \varepsilon_1 - b$:

$$I = [(\varphi_a - \varphi_b) + \varepsilon_1] / r_1.$$

Далее есть два пути решения задачи. Во-первых, можно применить закон Ома для участка цепи $a - \varepsilon_2 - b$:

$$-I = [(\varphi_a - \varphi_b) + \varepsilon_2] / r_2.$$

Во-вторых, можно воспользоваться законом Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r_1 + r_2}.$$

Взяв любые два уравнения из трех написанных и исключив силу тока I , найдем

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\varepsilon_2 r_1 + \varepsilon_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0,36 \text{ В}.$$

Задачи, рекомендуемые, для решения на аудиторных занятиях

Задача 1. Определить число электронов, проходящих в секунду через единицу площади поперечного сечения железной проволоки с удельным сопротивлением 90 нОм.м и длиной $l = 20 \text{ м}$ при напряжении на ее концах $U = 16 \text{ В}$.

Ответ: $5 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$.

Задача 2. Какой заряд пройдет по проводнику, если в течение $t = 10 \text{ с}$ сопротивление проводника равномерно возрастало, а разность потенциалов на концах проводника поддерживалась постоянной и ток уменьшился от $I_0 = 10 \text{ А}$ до $I = 5 \text{ А}$?

Ответ: 69 Кл .

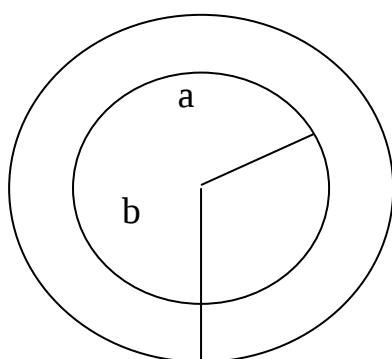


Рис. 3.18

Задача 3. Пространство между обкладками сферического конденсатора, радиусы которых равны a , и b (рис. 3.18), заполнено слабо проводящей однородной средой с удельным сопротивлением ρ . Определить силу тока утечки через конденсатор, если напряжение между обкладками U .

Ответ:
$$I = \frac{U}{R} = \frac{4\pi U}{\rho \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)}.$$

Задача 4. Два металлических шара радиусом a находятся на расстоянии d в безграничной проводящей среде, удельное сопротивление которой ρ . Определить сопротивление среды на участке между шарами при условии, что $d \gg a$.

Ответ: $R = \rho / 2\pi a$.

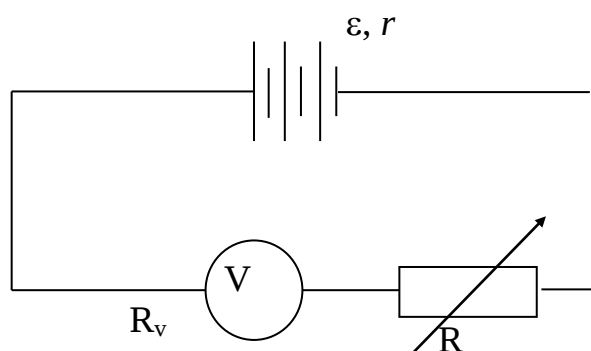


Рис. 3.19

Задача 5. К батарее гальванических элементов через резистор с переменным сопротивлением R подключен вольтметр (рис. 3.19). Если R уменьшить втрое, то показания вольтметра возрастут вдвое. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если R уменьшить до нуля?

Ответ: в четыре раза.

Задача 6. Проволочный куб составлен из проводников, сопротивление каждого проводника, составляющего ребро куба, равно 1 Ом. Вычислить сопротивление R этого куба, если он включен в электрическую цепь (рис. 6).

Ответ: 5/6 Ом.

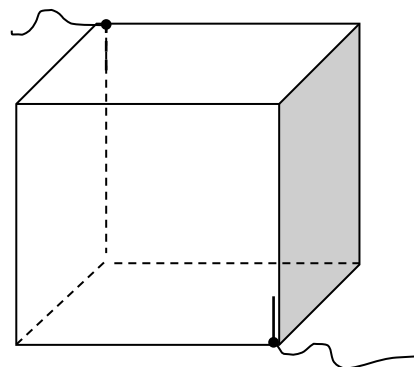


Рис. 3.20

Домашнее задание

1. Сила тока в проводнике равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до $I = 3$ А в течение времени $t = 10$ с. Определить заряд Q , прошедший через сечение проводника.

2. Определить плотность тока в железном проводнике длиной $l = 10$ м, если проводник находится под напряжением $U = 6$ В.

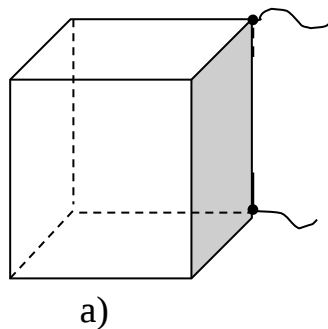
3. Напряжение на шинах электростанции $U = 6,6$ кВ. Потребитель находится на расстоянии $l = 10$ км. Какого сечения нужно взять медный провод для устройства двухпроводной линии передачи, если сила тока в линии $I = 20$ А и потери напряжения в проводах не должны превышать 3%?

4. Вычислить сопротивление R графитового проводника, изготовленного в виде прямого кругового усеченного конуса длиной $l = 20$ см и радиусами оснований $R_1 = 12$ мм и $R_2 = 8$ мм. Температура проводника $t = 20^\circ\text{C}$.

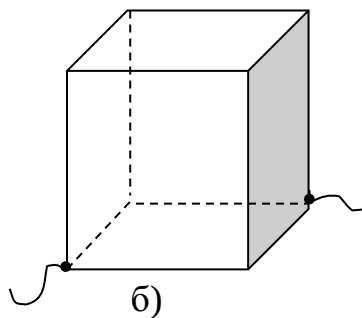
5. На одном конце цилиндрического медного проводника сопротивлением $R = 10$ Ом при 0°C поддерживается температура $t_1 = 20^\circ\text{C}$, а на другом температура $t_2 = 400^\circ\text{C}$. Найти сопротивление проводника, считая градиент температуры вдоль его оси постоянным.

6. Проволочный куб составлен из проводников. Сопротивление каждого проводника, составляющего ребро куба, равно 10 Ом. Вычислить сопротивление всего этого куба R , если он включен в электрическую цепь (рис. 3.21 а).

7. То же (см. задачу 6), если куб включен в цепь, как показано на рис. 3.21б.



а)



б)

Рис. 3.21

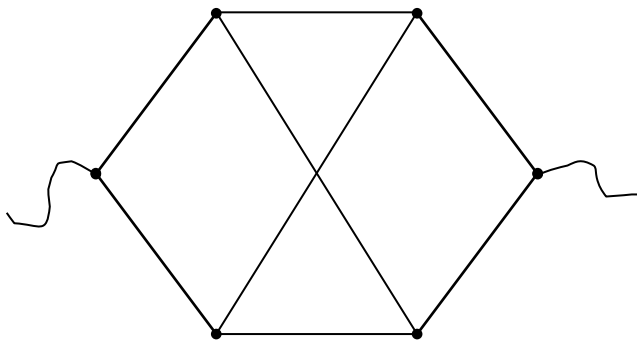


Рис.3.22

8. Вычислить сопротивление цепи (рис. 3.22). Считать сопротивление каждого проводника, заключенного между двумя узлами, равным 1 Ом.

9. То же (см. задачу 8) для цепи, схема которой представлена на рис. 3.24.

10. То же (см. задачу 8) для цепи, схема которой представлена на рис. 3.23.

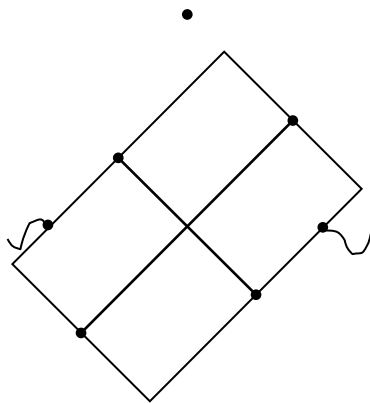


Рис. 3.23

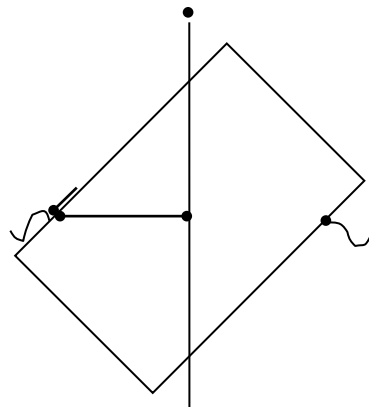


Рис. 3.24

11. Из материала с удельным сопротивлением ρ изготовлено плоское кольцо толщиной d . Радиусы кольца равны a и b ($b > a$). Между внешней и внутренней цилиндрическими поверхностями кольца поддерживается некоторая разность потенциалов U . Найти сопротивление кольца R в этих условиях.

12. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен веществом с относительной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 7$ и удельным сопротивлением $\rho = 10^{-11}$ Ом.м. Емкость конденсатора $C = 3000$ пФ. Найти ток утечки через конденсатор при подаче на него напряжения $U = 2000$ В.

13. Плоский бумажный конденсатор (т.е. конденсатор, в котором диэлектриком служит пропитанная вазелином бумага с $\varepsilon = 2,1$) теряет за 5 минут половину сообщённого ему заряда. Предполагая, что утечка заряда происходит только через диэлектрическую прокладку, вычислить ее удельное сопротивление.

14. Катушка и амперметр соединены последовательно и присоединены к источнику тока. К зажимам катушки присоединен вольтметр сопротивлением $R_v = 1$ кОм. Показание амперметра $I = 0,5$ А, вольтметра $U = 100$ В. Определить сопротивление R катушки. Сколько процентов от точ-

ного значения сопротивления катушки составит ошибка, если не учитывать сопротивление вольтметра?

15. Зашунтированный амперметр измеряет токи силой до $I = 10$ А. Какую наибольшую силу тока может измерить этот амперметр без шунта, если сопротивление амперметра $R_A = 0,02$ Ом и сопротивление шунта $R_{ш} = 5$ мОм?

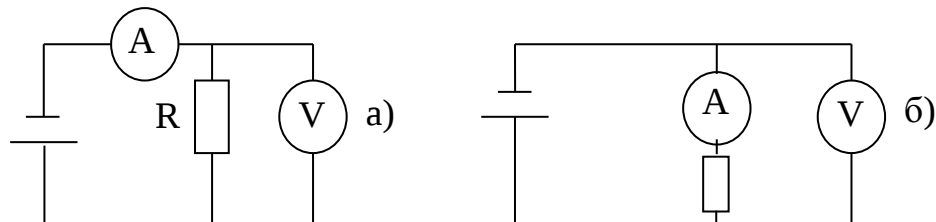


Рис. 3.25

16. Какая из схем (рис. 3.25 а, б) более пригодна для измерения больших сопротивлений и какая для измерения малых сопротивлений? Вычислить погрешность, допускаемую при измерении с помощью этих схем сопротивлений $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 10$ Ом. Принять сопротивление вольтметра $R_v = 5$ кОм, амперметра $R_A = 2$ Ом.

17. Внутреннее сопротивление батареи аккумуляторов $r = 3$ Ом. Сколько процентов от точного значения э.д.с. составляет ошибка, если, измеряя разность потенциалов на зажимах батареи вольтметром с сопротивлением $R_v = 200$ Ом, принять её равной э.д.с.?

18. К элементу с э.д.с. $\mathcal{E} = 1,5$ В присоединили катушку с сопротивлением $R_1 = 0,1$ Ом. Амперметр показал силу тока, равную $I_1 = 0,5$ А. Когда к элементу присоединили последовательно еще один элемент с такой же э.д.с., то сила тока в той же катушке оказалась $I_2 = 0,4$ А. Определить внутреннее сопротивление r первого и второго источников.

19. Две группы 2-х последовательно соединенных элементов соединены параллельно. Э.д.с. каждого элемента $\mathcal{E} = 1,2$ В, внутреннее сопротивление $r = 0,2$ Ом. Полученная батарея замкнута на внешнее сопротивление $R = 1,5$ Ом. Найти силу тока во внешней цепи.

20. Имеется N одинаковых элементов с э.д.с. $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r каждый. Из этих элементов требуется собрать батарею, состоящую из нескольких параллельно соединенных групп, содержащих по n последовательно соединенных элементов. При каком значении n сила тока во внешней цепи, имеющей сопротивление R , будет максимальной? Чему будет равно внутреннее сопротивление r батареи при этом значении n ?

21. Даны 12 элементов с э.д.с. $\mathcal{E} = 1,5$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,4$ Ом каждый. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить из собранной из них батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление $R = 0,3$ Ом? Чему равна наибольшая сила тока?

22. Два одинаковых источника тока с э.д.с. $\varepsilon = 1,2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0,4$ Ом соединены, как показано на рис.3.26. Какова сила тока в цепи и разность потенциалов между точками А и В в первом и во втором случаях?

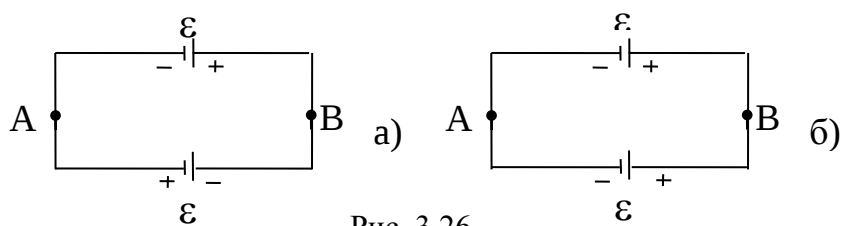


Рис. 3.26

23. Два элемента ($\varepsilon = 1,2$ В; $r_1 = 0,1$ Ом; $\varepsilon_2 = 0,9$ В; $r_2 = 0,3$ Ом) соединены одноименными полюсами. Сопротивление соединительных проводов $R = 0,2$ Ом. Определить силу тока в цепи.

24. Какую долю э.д.с. элемента ε составляет разность потенциалов на его зажимах, если сопротивление элемента r в 10 раз меньше внешнего сопротивления R ?

25. Два последовательно соединенных элемента с одинаковыми э.д.с. $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = 2$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 10$ Ом, $r_2 = 1,5$ Ом замкнуты на внешнее сопротивление $R = 0,5$ Ом. Найти разность потенциалов на зажимах каждого элемента.

3.2.2. Работа и мощность тока Основные формулы

1. Работа электрических сил на однородном участке цепи, на концах которого имеется разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$

$$A = (\varphi_1 - \varphi_2)It,$$

где I - сила тока, t - время его протекания.

2. Количество теплоты, выделенное на участке цепи сопротивлением R , по которой течет в течение времени t ток силой I , определяется соотношением (закон Джоуля-Ленца)

$$Q = I^2 R t.$$

3. Закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

Плотность тепловой мощности тока ω в данной точке проводника пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в этой же точке:

$$\omega = \sigma E^2.$$

4. Работа, совершаемая источником тока за время t ,

$$A = \varepsilon It = I^2 R_{\text{полн}} t = \frac{\varepsilon^2}{R_{\text{полн}}} t,$$

где ε - э.д.с. источника, $R_{\text{полн}}$ - полное сопротивление цепи.

5. Электрическая мощность, отдаваемая источником во внешнюю цепь (так называемая полезная мощность), определяется равенством

$$P = U \cdot I = I^2 R \quad \text{или} \quad P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2},$$

где r - внутреннее сопротивление источника.

6. Полная мощность всей цепи

$$P_0 = I^2 R + I^2 r = I \cdot \varepsilon \quad \text{или} \quad P = \frac{\varepsilon^2}{R + r}.$$

7. Электрическим коэффициентом полезного действия η называется отношение полезной мощности к полной мощности, развиваемой источником. К.п.д. можно выразить следующим образом:

$$\eta = \frac{U}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{R}{R + r}.$$

Режим работы источника постоянного тока полностью определяется сопротивлением нагрузки. Источник тока отдает нагрузке максимальную мощность в том случае, когда он замкнут на сопротивлении, равном внутреннему сопротивлению источника $R = r$.

Различают три характерных режима работы источника: режим холостого хода ($R = \infty$), режим максимальной полезной мощности ($R = r$) и режим короткого замыкания ($R = 0$).

Примеры решения задач

Задача 1. Определить работу электрических сил и количество теплоты, выделяемое ежесекундно:

1) в резисторе, по которому идет ток силой $I = 1$ А, разность потенциалов между концами резистора $\varphi_A - \varphi_B = 2$ В;

2) в аккумуляторе, который заряжается током силой $I = 1$ А, разность потенциалов на его зажимах $\varphi_A - \varphi_B = 2$ В, э.д.с. аккумулятора $\varepsilon = 1,3$ В;

3) в батарее аккумуляторов, которая даёт ток силой $I = 1$ А на внешнюю нагрузку, разность потенциалов на зажимах батареи $\varphi_A - \varphi_B = 2$ В. $\varepsilon = 2,6$ В.

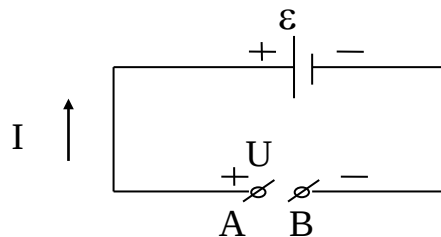
Решение

Дано:

1) $I = 1$ А; $\varphi_A - \varphi_B = 2$ В

2) $I = 1$ А; $\varphi_A - \varphi_B = 2$ В
 $\varepsilon = 1,3$ В.

3) $I = 1$ А; $\varphi_A - \varphi_B = 2$ В
 $\varepsilon = 2,6$ В.



1. Так как рассматриваемый участок не содержит э.д.с., то по закону Ома для однородного участка цепи $\varphi_A - \varphi_B = I R$. Значит, вся работа электрических сил идет на нагревание резистора:

$$A = Q = (\varphi_A - \varphi_B) I \cdot t = 2 \text{ Дж.}$$

2. При зарядке аккумулятора его зажимы присоединяют к источнику, разность потенциалов на полюсах которого постоянна. При этом ток внутри аккумулятора идет от положительного полюса к отрицательному (рис. 3.27), т.е. в направлении, обратном току разряда. Работу электрических сил снова вычисляют по формуле

$$A = (\varphi_A - \varphi_B) I \cdot t = 2 \text{ Дж.}$$

Чтобы определить количество выделенной теплоты, найдем сопротивление R участка $A - \varepsilon - B$. Поскольку он содержит э.д.с., применим закон Ома для неоднородной цепи. Учитывая напряжение тока и э.д.с., запишем в соответствии с правилом знаков:

$$I = \frac{\varphi_A - \varphi_B - \varepsilon}{R}, \quad R = \frac{\varphi_A - \varphi_B - \varepsilon}{I}.$$

Подставив значение R , получим

$$Q = I^2 R t = I^2 \frac{(\varphi_A - \varphi_B - \varepsilon)}{I} = (\varphi_A - \varphi_B - \varepsilon) I t = 0,7 \text{ Дж.}$$

В данном случае лишь часть работы электрических сил идет на нагревание аккумулятора, остальная же часть $A - Q = 1,3 \text{ Дж}$ превращается в химическую энергию заряжаемого аккумулятора.

3 Работу электрических сил также найдем по формуле

$$A = (\varphi_A - \varphi_B) I \cdot t.$$

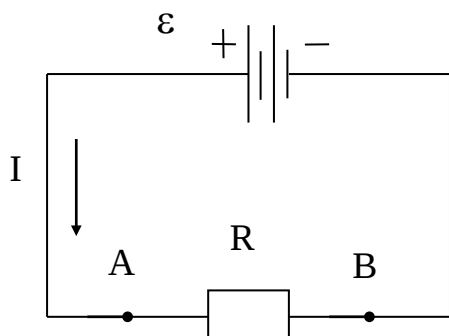


Рис. 3.28

При этом обратим внимание на отличие данного случая от предыдущего. Если положительный знак разности $\varphi_A - \varphi_B$ сохранился, то направление тока на участке $A - \varepsilon - B$ изменилось на противоположное (рис.3.28). Следовательно,

$$A = (\varphi_A - \varphi_B)(-I) \cdot t = -(\varphi_A - \varphi_B) I \cdot t = 2 \text{ Дж.}$$

Отрицательный знак ответа выражает то обстоятельство, что положительные заряды движутся внутри каждого аккумулятора от его низшего потенциала к высшему, т.е. против электрических сил. При этом положительную работу совершают сторонние силы, перемещая заряды внутри аккумуляторов.

Найдем количество теплоты, выделенное в батарее. При этом сопротивление батареи r можно вычислить по закону Ома для участка неоднородной цепи $A- \varepsilon -B$. Теперь, учитывая направление тока и знак ЭДС, запишем

$$-I = (\varphi_A - \varphi_B - \varepsilon) / r.$$

Сопротивление батареи r можно найти как разность между сопротивлением всей цепи и сопротивлением внешнего участка цепи:

$$\tau = R_{\text{полн}} - R = \frac{\varepsilon}{R} - \frac{\varphi_A - \varphi_B}{I} = \frac{\varepsilon - (\varphi_A - \varphi_B)}{I}.$$

Подставив найденное значение r , получим

$$Q = I^2 r t = [\varepsilon - (\varphi_A - \varphi_B)] \cdot I \cdot t = 0,6 \text{ Дж}$$

Этот вариант задачи можно решить по-другому. Найдем работу электрических сил на внешнем участке цепи $A- R- B$:

$$A_{\text{внеш}} = (\varphi_A - \varphi_B) I \cdot t = 2 \text{ Дж}.$$

Однако работа электрических, т.е. кулоновских (но не сторонних), сил по перемещению зарядов по замкнутому пути всегда равна нулю. Значит,

$$A_{\text{внутр}} + A_{\text{внеш}} = 0.$$

Отсюда $A_{\text{внутр}} = -A_{\text{внеш}} = -2 \text{ Дж}$, что совпадает с решением второй части задачи.

Вся энергия, расходуемая батареей, превращается (посредством работы электрических сил) в тепло $Q_{\text{общ}}$, выделяющееся во всей цепи:

$$A_{\text{батареи}} = Q_{\text{общ}} = \varepsilon I t = 2,6 \text{ Дж}.$$

Так как на внешнем участке выделяется количество теплоты

$$Q_{\text{внеш}} = A_{\text{внеш}} = 2 \text{ Дж},$$

то для батареи

$$Q = Q_{\text{общ}} - Q_{\text{внеш}} = 0,6 \text{ Дж}.$$

Задача 2. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 12 \text{ В}$. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, $I_{\text{max}} = 5 \text{ А}$. Какая наибольшая мощность P_{max} может выделяться на подключенном к батарее резисторе с переменным сопротивлением?

Решение

Мощность P тока измеряется работой, совершенной электрическими силами в единицу времени. Поскольку вся работа на внешнем участке цепи идет на нагревание резистора ($A = Q$), то в данном случае мощность изме-

ряется количеством теплоты, выделяемым в резисторе в единицу времени. Поэтому $P = I^2 R$ или с использованием закона Ома для замкнутой цепи

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2},$$

где R и r - сопротивление внешнего и внутреннего участков цепи соответственно. Отсюда видно, что при постоянных величинах ε и r мощность P является функцией одной переменной - внешнего сопротивления R . Известно, что эта функция дает максимум при условии $R = r$. Следовательно

$$P_{\max} = \frac{\varepsilon^2 r}{(R + r)^2} = \frac{\varepsilon^2}{4r}.$$

Таким образом, задача сводится к отысканию сопротивления внутреннего участка цепи (батареи). Если учесть, что согласно закону Ома для замкнутой цепи, наибольшая сила тока $I_{\max}$ будет при внешнем сопротивлении $R = 0$ (ток короткого замыкания), то

$$I_{\max} = \frac{\varepsilon}{R} \quad \text{или} \quad r = \frac{\varepsilon}{I_{\max}}.$$

Тогда максимальная мощность равна:

$$P_{\max} = \varepsilon I_{\max} / 4 = 15 \text{ Вт.}$$

Задачи, рекомендуемые для решения на аудиторных занятиях

Задача 1. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I = 6$ А. Определить теплоту Q_1 , выделившуюся в этом проводнике за первую секунду, и Q_2 - за вторую, а также найти отношение Q_2 / Q_1 .

Ответ: $Q_1 = 60$ Дж, $Q_2 = 420$ Дж, $Q_2 / Q_1 = 7$.

Задача 2. От батареи, э.д.с. которой $\varepsilon = 600$ В, требуется передать энергию на расстояние $l = 1$ км. Потребляемая мощность $P = 5$ кВт. Найти минимальные потери мощности в сети, если диаметр медных подводящих проводов $d = 0,5$ см.

Ответ: $P_{\min} = 126$ Вт.

Задача 3. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена одна секция, то вода закипает через $t_1 = 10$ мин, если дру-

гая, то через $t_2 = 20$ мин. Через сколько минут закипит вода, если обе секции включить а) параллельно, б) последовательно?

Ответ: а) $t_1 = 6,7$ мин; б) $t_2 = 30$ мин.

Задача 4. К батарее, э.д.с. которой $\varepsilon = 2$ В и внутреннее сопротивление $r = 0,5$ Ом, присоединен проводник. Определить: 1) при каком сопротивлении проводника мощность, выделяемая в нем, максимальна? 2) как велика при этом мощность, выделяемая в проводнике?

Ответ: 1) $R = 0,5$ Ом; 2) $P_{\max} = 2$ Вт.

Задача 5. Две медные проволоки одинаковой длиной $l = 1$ м и диаметрами $d_1 = 0,1$ мм и $d_2 = 0,2$ мм, подключенные (поочередно) к зажимам гальванического элемента, нагреваются до одной и той же температуры. Определить его внутреннее сопротивление. Считать отдачу теплоты проволокой в окружающее пространство при постоянной температуре пропорциональной площади её поверхности.

Ответ: $r = 0,3$ Ом.

Задача 6. При силе тока $I_1 = 3$ А во внешней цепи батареи выделяется мощность $P_1 = 18$ Вт, а при силе тока $I_2 = 1$ А - $P_2 = 10$ Вт. Определить э.д.с. и внутреннее сопротивление r батареи.

Ответ: $\varepsilon = 12$ В, $r = 2$ Ом.

Домашнее задание

1. Лампочка и реостат, соединенные последовательно, присоединены к источнику тока. Напряжение на зажимах лампочки $U = 40$ В, сопротивление реостата $R = 10$ Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $P = 120$ Вт. Найти силу тока в цепи.

2. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 12$ В, сила тока короткого замыкания $I = 5$ А. Какую наибольшую мощность может дать батарея во внешнюю цепь?

3. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 20$ В. Сопротивление внешней цепи $R = 2$ Ом, сила тока $I = 4$ А. С каким к.п.д. работает батарея? При каком значении внешнего сопротивления к.п.д. будет 99%?

4. Требуется изготовить нагревательную спираль для электрической плитки мощностью 0,5 кВт, предназначенной для включения в цепь напряжением 220 В. Сколько (в метрах) нужно взять для этого нихромовой проволоки диаметром 0,4 мм? Удельное сопротивление нихрома в нагретом состоянии $1,05 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

5. К зажимам батареи аккумуляторов присоединен нагреватель. Э.д.с. батареи $\varepsilon = 24$ В, внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Нагреватель, включенный в цепь, потребляет мощность $P = 80$ Вт. Вычислить силу тока в цепи и к.п.д. нагревателя.

6. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена только первая секция, то вода закипает через $t_1 = 15$ мин, а если только вторая, то через $t_2 = 30$ мин. Через сколько минут закипает вода, если обе секции включать последовательно и параллельно?

7. Ток в проводнике сопротивлением $R = 100$ Ом равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 10$ А в течение времени $t = 30$ с. Чему равно количество теплоты, выделившееся за это время в проводнике?

8. Ток в проводнике сопротивлением $R = 12$ Ом равномерно убывает от $I_0 = 5$ А до $I = 0$ в течение времени $t = 10$ с. Какое количество теплоты выделяется в этом проводнике за указанный промежуток времени?

9. По проводнику сопротивлением $R = 3$ Ом течёт равномерно нарастающий ток. Количество теплоты, выделившееся в проводнике за время $t = 8$ с, $Q = 200$ Дж. Определить количество электричества, протекшее за это время по проводнику. В момент времени, принятый за начальный, ток в проводнике был равен нулю.

10. Ток в проводнике сопротивлением $R = 15$ Ом равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до некоторого максимума в течение времени $t = 3$ с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 10$ кДж. Найти среднее значение силы тока в проводнике за этот промежуток времени.

11. Ток в проводнике равномерно увеличивается от $I_0 = 0$ до некоторого максимального значения в течение времени $t = 10$ с. За это время в проводнике выделилось количество теплоты $Q = 1$ кДж. Определить скорость нарастания тока в проводнике, если его сопротивление $R = 3$ Ом.

12. Генератор с напряжением на зажимах 220 В передает во внешнюю цепь мощность 11 кВт. Какого минимального сечения должны быть медные провода линии передачи длиной 50 м, чтобы потеря напряжения в них не превышала 2% от указанного напряжения?

13. Мощность тока у потребителя 10 кВт при напряжении 400 В. Определить падение напряжения в медных проводах линии передачи, если их сечение 26 мм^2 , а расстояние от генератора до потребителя 500 м.

14. В сеть с напряжением 220 В параллельно включены пять электродвигателей электрической мощностью 1,5 кВт каждый. Длина подводящих медных проводов 250 м, а их сечение 25 мм. Определить ток в цепи, напряжение на зажимах генератора и потерю мощности в подводящих проводах.

15. Источник электрической энергии с э.д.с. 1,6 В и внутренним сопротивлением $r = 0,8$ Ом замыкается проводником. Определить силу тока и сопротивление проводника, если мощность тока во внешней цепи 0,6 Вт.

16. При внешнем сопротивлении $R_1 = 8 \text{ Ом}$ сила тока в цепи $I_1 = 0,8 \text{ А}$, при сопротивлении $R_2 = 15 \text{ Ом}$ сила тока $I = 0,5 \text{ А}$. Определить силу тока $I_{к.з.}$ короткого замыкания источника э.д.с..

17. Имеется $N = 24$ одинаковых источника тока с э.д.с. $\mathcal{E} = 1 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 0,2 \text{ Ом}$. Эти источники соединены так, что образуют батарею из n последовательных секций, каждая из которых состоит из N/n соединенных параллельно источников. К батарее подключен прибор, обладающий сопротивлением $R = 0,3 \text{ Ом}$. При каком n мощность P , отбираемая прибором, будет максимальной? Чему равно максимальное значение $P_{\max}$?

18. Какую полезную максимальную мощность может выделить аккумулятор с э.д.с. $\mathcal{E} = 10 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$? Каково при этом сопротивление внешней цепи?

19. Определить к.п.д. η аккумулятора в задаче № 18.

20. Электрический кипятильник имеет три обмотки. Если соединить две обмотки параллельно, подключив к ним третью последовательно, то при различных комбинациях обмоток вода в баке закипает соответственно за 20, 40 и 16 мин. Через сколько времени закипит вода, если все обмотки соединить последовательно и параллельно?

21. Зарядка аккумулятора с начальной э.д.с. $\mathcal{E}$ осуществляется зарядной станцией, напряжение в сети которой равно U . Внутреннее сопротивление аккумулятора r . Определить полезную мощность, расходуемую на зарядку аккумулятора, и мощность, расходуемую на выделение тепла в аккумуляторе.

22. От батареи с э.д.с., $\mathcal{E} = 500 \text{ В}$ требуется передать энергию на расстояние $l = 2,5 \text{ км}$. Потребляемая мощность $P = 10 \text{ кВт}$. Найти минимальные потери мощности ΔP в сети, если диаметр медных подводящих проводов $d = 1,5 \text{ см}$.

23. Батарея с э.д.с. $\mathcal{E} = 240 \text{ В}$ и внутренним сопротивлением $r = 1 \text{ Ом}$ замкнута на внешнем сопротивлении $R = 23 \text{ Ом}$. Найти полную мощность P_0 , полезную мощность $P_{\text{полз}}$ и к.п.д. η батареи.

24. Найти внутреннее сопротивление r генератора, если известно, что мощность P , выделяющаяся во внешней цепи, одинакова при внешних сопротивлениях $R_1 = 5 \text{ Ом}$ и $R_2 = 0,2 \text{ Ом}$. Найти к.п.д. η генератора в каждом из этих случаев.

25. Элемент замыкают сначала на внешнее сопротивление $R_1 = 2 \text{ Ом}$, а затем на внешнее сопротивление $R_2 = 0,5 \text{ Ом}$. Найти э.д.с. $\mathcal{E}$ элемента и внутреннее сопротивление r , если известно, что в каждом из этих случаев мощность, выделяющаяся во внешней цепи, одинакова и равна $P = 2,5 \text{ Вт}$.

Варианты индивидуального задания

№ варианта	Тема 1	Тема 2
1	1,25,13	13,1,25
2	2,24,14	6,2,24
3	3,23,15	18,3,23
4	4,22,16	2,4,22
5	5,21,17	1,5,21
6	6,20,18	5,6,18
7	7,19,1	3,7,19
8	8,18,2	17,8,18
9	9,17,3	19,9,17
10	10,16,4	20,10,16
11	11,15,5	8,11,15
12	12,14,6	7,12,19
13	13,25,7	9,13,3
14	14,1,8	16,11,5
15	15,2,9	10,15,17
16	16,3,10	11,16,25
17	17,4,11	21,17,9
18	18,8,12	14,18,1
19	19,6,13	2,19,10
20	21,8,15	25,20,11
21	20,7,14	23,16,12
22	22,9,16	24,20,13
23	23,10,17	12,22,14
24	24,11,18	1,24,15
25	25,12,19	16,25,2

3.3. Электромагнетизм

3.3.1. Магнитное поле постоянных токов

Основные законы и теоремы

1. Магнитное поле движущегося заряда и элемента тока (закон Био-Савара-Лапласа):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[q\vec{v}\vec{r}]}{r^3}; \quad d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[Id\vec{l}\vec{r}]}{r^3},$$

где $Id\vec{l}$ - элемент тока, $\vec{r}$ - радиус-вектор точки, в которой определяется индукция поля, μ_0 - магнитная постоянная.

2. Принцип суперпозиции полей

$$\vec{B} = \Sigma \vec{B}_i,$$

где $\vec{B}_i$ - индукция магнитного поля i -го проводника.

3. Магнитное поле конечного контура с током

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[Id\vec{l}\vec{r}]}{r^3}.$$

4. Циркуляция вектора индукции магнитного поля $\vec{B}$ и теорема Гаусса для него:

$$\oint \vec{B} d\vec{e} = \mu_0 \Sigma I_i; \quad \oint \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

5. Сила Ампера и сила Лоренца:

$$d\vec{F}_A = [Id\vec{l}\vec{B}]; \quad \vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}].$$

6. Сила и момент сил, действующих на контур с током с магнитным моментом $\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}$ (магнитный диполь):

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}; \quad \vec{M} = [\vec{p}_m \vec{B}],$$

где $\frac{\partial \vec{B}}{\partial n}$ - производная вектора $\vec{B}$ по направлению магнитного момента.

7. Вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ и его циркуляция:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}; \quad \oint \vec{H} d\vec{l} = \Sigma I_i,$$

где ΣI_i - суммарный макроскопический ток проводимости, $\vec{J}$ - вектор намагниченности вещества.

8. Соотношения между $\vec{B}$ и $\vec{H}$ для магнетиков, в которых $\vec{J} = \chi \vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \mu = 1 + \chi,$$

где χ и μ - магнитные восприимчивость и проницаемость магнетика соответственно.

9. Магнитное поле прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi r} I (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где α_1 и α_2 - углы между направлением тока в проводнике и направлением радиус-векторов, проведенных от начала и конца проводника к точке, в которой определяется B .

10. Магнитное поле на оси кругового тока

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где R - радиус витка, x - расстояние от центра витка до точки на оси, в которой измеряется поле.

Расчет магнитных полей токов

Примеры решения задач

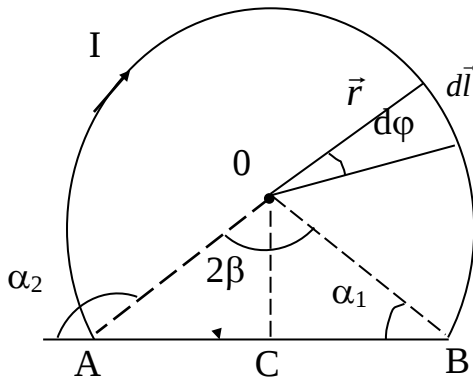


Рис. 3.29

Задача 1. Ток $I=5$ А течет по тонкому изогнутому проводнику (рис. 3.29). Радиус изогнутой части проводника $R = 120$ мм, угол $2\beta = 90^\circ$. Найти индукцию магнитного поля в точке O .

Решение

Индукция $\vec{B}$ магнитного поля в точке O является векторной суммой индукций $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ создаваемых током, протекающим по круговому и прямолинейному участкам проводника.

Все элементы тока создают в точке O магнитные поля, векторы индукции которых направлены в одну сторону (перпендикулярно плоскости рис. 1, "от нас"). Поэтому от векторной суммы можно перейти к алгебраической, т.е.

$$B = B_1 + B_2.$$

Используя закон Био-Савара-Лапласа, вычислим индукцию B_1 , создаваемую участком кругового тока:

$$B_1 = \int_{(AB)} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(d\vec{l} \vec{r})}{R^2}.$$

Для всех участков кругового тока угол между $d\vec{l}$ и $\vec{r}$ равен $\frac{\pi}{2}$, а элемент длины $dl = R d\varphi$. Угол φ при интегрировании по участку кругового тока изменяется от 0 до $(2\pi - 2\beta)$. Вычисление интеграла даёт следующее выражение:

$$B_1 = \int_0^{2\pi-2\beta} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi-2\beta} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (\pi - \beta).$$

Для вычисления индукции B_2 , создаваемой прямолинейным участком тока ВСА, можно воспользоваться выражением, определяющим индукцию магнитного поля прямого тока:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

Для данной задачи из треугольников АОС и СОВ

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \beta; \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \beta; r = R \cdot \cos \beta.$$

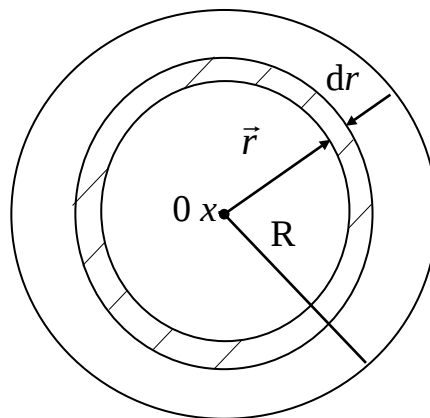
Подстановка значений даёт:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \operatorname{tg} \beta.$$

Индукция результирующего поля в точке 0 будет равна:

$$B = 28 \text{ мкТл.}$$

Задача 2. Тонкий непроводящий диск радиусом R , равномерно заряженный с поверхностной плотностью σ , вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти а) индукцию магнитного поля в центре диска; б) магнитный момент диска.



Решение

Выделим на расстоянии r от центра диска кольцевую полоску шириной dr . На этой полоске находится заряд

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r dr.$$

Вследствие вращения данный заряд создает электрический круговой ток силой

$$dI = dqv = dq \frac{\omega}{2\pi}.$$

Круговой ток создает в центре диска магнитное поле с индукцией dB , которая может быть вычислена как индукция на оси кругового тока при $H = 0$:

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r}.$$

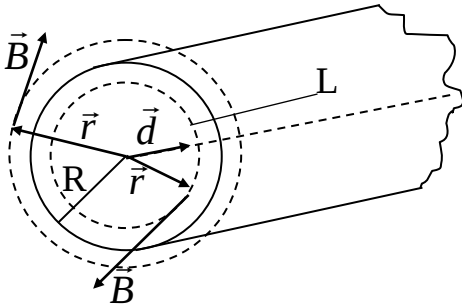
Магнитный момент тока dI

$$dp_m = dI \cdot S = dI \cdot \pi r^2.$$

Используя принцип суперпозиции и учитывая, что все элементарные кольцевые токи dI создают в центре диска магнитные поля одного направления, получим:

$$B = \int dB = \int \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2};$$

$$p_m = \int dp_m = \int \pi r^2 dI = \int_0^R \pi \sigma \omega r^3 dr = \frac{\pi \sigma \omega}{4} R^4.$$



Задача 3. По круглому однородному прямому проводу, радиус сечения которого R , течет постоянный ток плотностью $\vec{j}$. Найти вектор индукции магнитного поля этого тока в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором $\vec{r}$. Магнитную проницаемость всюду считать равной единице.

Решение

В данной задаче величина вектора $\vec{B}$ зависит только от расстояния до оси провода, а сам вектор направлен по касательной к окружности, с центром на оси провода и проходящей через данную точку. Поэтому для решения задачи воспользуемся теоремой о циркуляции вектора $\vec{B}$: $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I$, где I - сила тока через поверхность контура.

1. Выберем в качестве контура интегрирования окружность радиусом $r \leq R$, направление обхода контура интегрирования свяжем с направлением вектора $\vec{j}$ правилом правого винта. Тогда

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \int_L B dl = B \int_0^{2\pi} dl = 2\pi B r.$$

Сила тока через поверхность круга радиусом r

$$I = j \cdot \pi \cdot r^2.$$

По теореме о циркуляции

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot j \cdot \pi r^2, \quad B = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot j \cdot r.$$

Учитывая взаимную ориентацию векторов $\vec{j}$ и $\vec{r}$, получим, что вектор индукции магнитного поля внутри проводника с током

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j} \cdot \vec{r}].$$

2. При $r \geq R$ решение задачи аналогично предыдущему, за исключением того, что сила тока через поверхность контура будет постоянной и равной $I = j\pi R^2$. Тогда

$$B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

А в векторном виде

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 R^2}{r^2} [\vec{j} \cdot \vec{r}].$$

Задача 4. Постоянный ток $I = 10$ А течет по длинному прямому проводнику круглого сечения. Найти поток вектора магнитной индукции через одну из половин осевого сечения в расчете на один метр его длины.

Решение

Воспользуемся результатом решения предыдущей задачи при $r \leq R$.

$$\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 [\vec{j} \cdot \vec{r}].$$

Выберем вектор нормали к заштрихованной части сечения проводника совпадающим с направлением индукции магнитного поля. Тогда

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B dS.$$

Выделим в сечении полоску шириной dr и длиной l , находящуюся на расстоянии r от оси провода. Ввиду малости величины dr можно считать, что величина индукции магнитного поля в пределах полоски постоянна и равна $B(r)$. Учитывая это, подставим в выражение потока значения

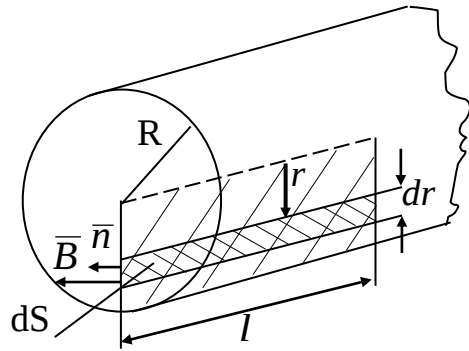
$$B(r) = \frac{1}{2} \mu_0 j r, \quad dS = l \cdot dr,$$

получим

$$\Phi = \int_0^R \frac{1}{2} \mu_0 j r l dr = \frac{1}{4\pi} \mu_0 I l.$$

Теперь можно найти магнитный поток, приходящийся на единицу длины проводника:

$$\frac{\Phi}{l} = \frac{1}{4\pi} \mu_0 I.$$



Задача 5. Сколько ампер-витков необходимо для получения индукции $B = 1,4$ Тл в электромагните с железным сердечником длиной $l = 90$ см и воздушным промежутком $l_0 = 5$ мм. Рассеянием магнитного потока в воздушном промежутке пренебречь.

Решение

Пренебрегая рассеянием магнитного потока в зазоре, можно принять, что индукция в зазоре равна индукции магнитного поля в сердечнике, т.е. $B_1 = B_2 = B$. Используя теорему о циркуляции вектора $\vec{H}$, можно записать

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = H_1 \cdot l + H_2 l_0 = \sum_{i=1}^N I_i = I \cdot N.$$

Учитывая, что для воздуха $\mu \approx 1$ найдем, что

$$H_2 = \frac{B}{\mu_0}.$$

Величину H_1 найдем по графику зависимости индукции в железе от напряженности поля [6].

$$H_1 = 1700 \text{ А/м (для } B = 1,4 \text{ Тл).}$$

Искомое число ампер-витков $I N$ найдется как

$$I \cdot N = 7100 \text{ А-витков.}$$

Задачи, рекомендуемые для аудиторных занятий

Задача 1. По проводнику, согнутому в виде квадратной рамки со стороной $a = 10$ см, течет ток $I = 5$ А. Определить индукцию B магнитного поля в точке, равноудаленной от вершин квадрата на расстояние, равное его стороне.

Ответ: $B = 1,33 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Задача 2. Катушка длиной $l = 20$ см содержит $N = 100$ витков. По обмотке катушки идет ток $I = 5$ А. Диаметр катушки $d = 20$ см. Определить индукцию в точке, лежащей на оси катушки на расстоянии $a = 10$ см от её конца.

Ответ: $B = 6,06 \cdot 10^{-4}$ Тл.

Задача 3. Квадратная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником с током $I = 5$ А. Сторона рамки $a = 8$ см. Про-

ходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии, которое в $\eta = 1,5$ раза больше стороны рамки. Найти поток вектора $\vec{B}$ через поверхность рамки.

Ответ: $\Phi = \left(\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \right) \ln \left(\frac{2\eta + 1}{2\eta - 1} \right)$

Задача 4. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по окружности радиусом $r = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м. Вычислить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока и механический момент M , действующий на круговой ток, если атом помещен в магнитное поле с индукцией $B = 0,1$ Тл, направленной параллельно плоскости орбиты электрона.

Ответ: $p_m = 9,4 \cdot 10^{-24}$ Нм/Тл, $M = 9,4 \cdot 10^{-25}$ Н·м.

Задача 5. На постоянный магнит, имеющий форму цилиндра длиной $l = 15$ см, намотали равномерно $N = 300$ витков тонкого провода. При пропускании по нему тока $I = 3$ А поле вне магнита исчезло. Найти коэрцитивную силу H_c материала, из которого изготовлен магнит.

Ответ: $H_c = 6$ кА/м.

Задача 6. Найти магнитный момент тонкого кругового витка с током, если радиус витка $R = 100$ мм и индукция магнитного поля в его центре $B = 6$ мкТл.

Ответ: $p_m = \frac{2\pi R^3 B}{\mu_0} = 30 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$.

Задача 7. Бесконечная пластина толщиной a из изотропного магнетика помещена в перпендикулярное к ней однородное внешнее поле с индукцией $\vec{B}_0 = B_0 \vec{i}$. Магнитная проницаемость пластины изменяется линейно от значения μ_1 на левой границе до μ_2 на правой границе. Найти поток Φ_n вектора $\vec{H}$ через воображаемую цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными $\vec{B}_0$. Основания цилиндра расположены в точках с координатами $x_1 = a/2$ и $x_2 = 3a/2$. Площадь каждого основания равна S .

Ответ: $\Phi_n = (S \cdot B_0 / \mu_0) [1 - 2 / (\mu_1 + \mu_2)]$.

Задача 8. Найти плотность тока как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от r как $B = \varphi \cdot r^\alpha$, где φ и α - положительные постоянные.

Ответ: $j(r) = (\varphi / \mu_0) \cdot (1 + \alpha) \cdot r^{\alpha-1}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Ток I течет по тонкому проводнику, который имеет вид правильного n - угольника, вписанного в окружность радиусом R . Найти магнитную индукцию в центре данного контура. Исследовать полученное выражение при $n \rightarrow \infty$.

Задача 2. Найти индукцию магнитного поля в центре контура, имеющего вид прямоугольника, если его диагональ $d = 16$ см, угол между диагоналями $\varphi = 30^\circ$ и ток в контуре $I = 5$ А.

Задача 3. По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

Задача 4. Найти индукции магнитного поля в т.О контура с током $I = 5$ А при:

$a = 20$ см, $b = 40$ см, $\varphi = 90^\circ$ (рис. 3.30.а);

$a = 20$ см, $b = 40$ см (рис. 3.30.б);

$a = 60$ см (равносторонний треугольник), O - точка пересечения высот (рис. 3.30 в).

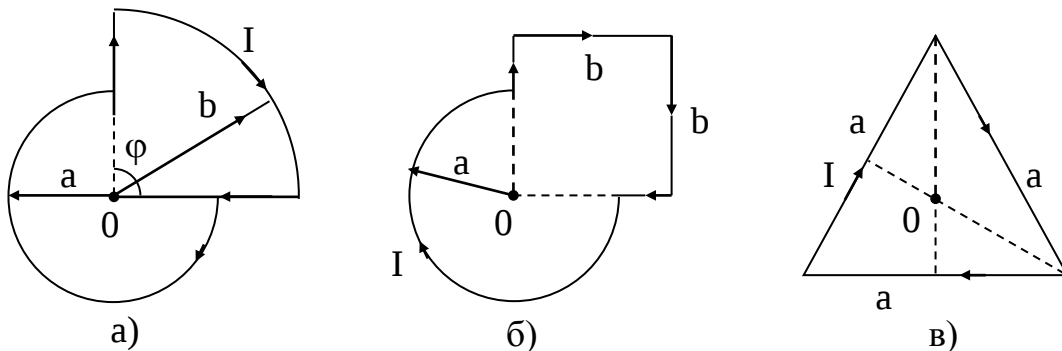


Рис.3.30

Задача 5. Определить индукцию магнитного поля в точке O , если радиус изогнутой части проводника с током I равен R ; прямолинейные участки проводника предполагаются очень длинными (рис. 3.31. а - в).

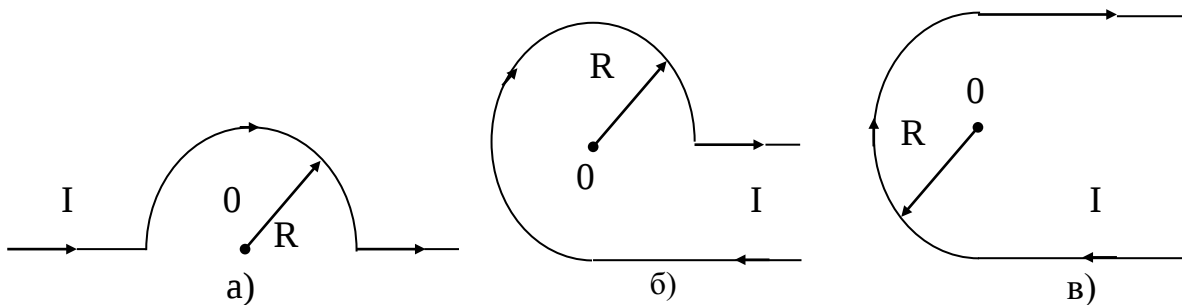


Рис.3.31

Задача 6. Найти индукцию магнитного поля в точке 0, если проводник с током $I = 8 \text{ А}$ имеет вид, показанный на рис. 3.32 а - в. Радиус изогнутой части проводника $R = 100 \text{ мм}$.

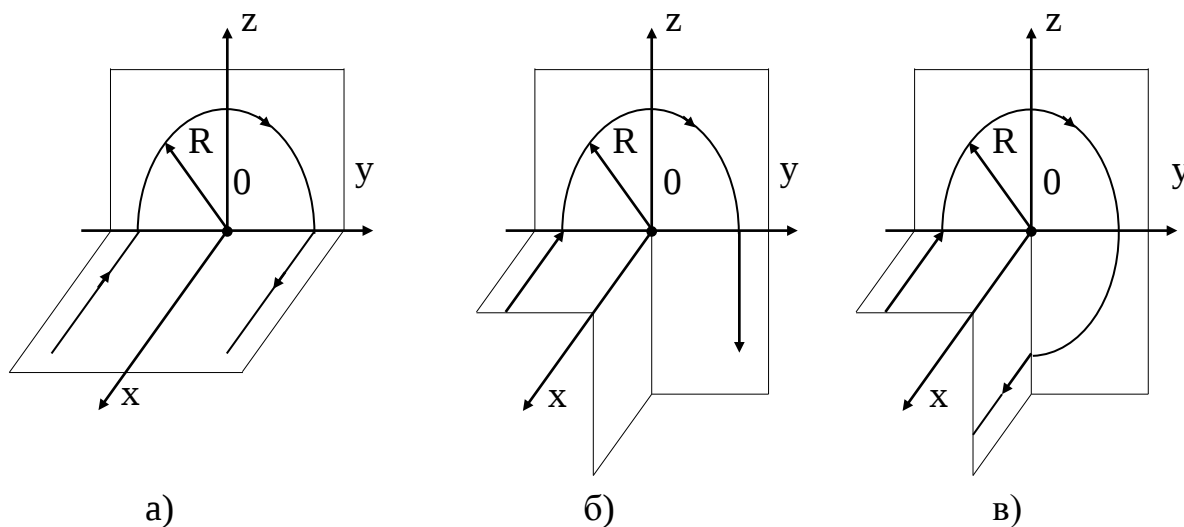


Рис. 3.32

Задача 7. Найти индукцию магнитного поля в точке 0, если проводник с током $I = 10 \text{ А}$ имеет вид, показанный на рис. 3.33. а - в. Радиус изогнутой части проводника $R = 0,2 \text{ м}$, прямолинейные участки проводника очень длинные.

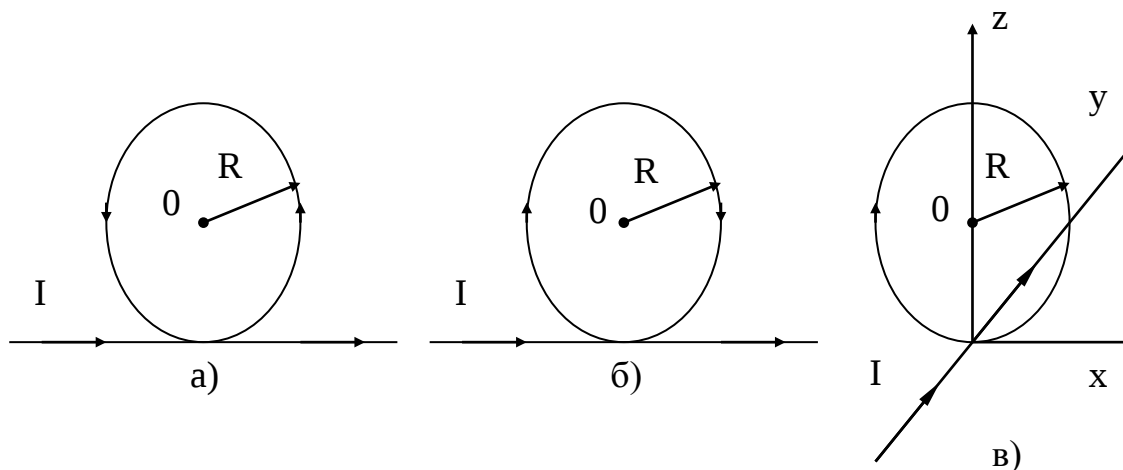


Рис. 3.33

Задача 8. Два бесконечно длинных прямых проводника скрещены под прямым углом. По проводникам текут токи $I_1 = 80 \text{ А}$ и $I_2 = 60 \text{ А}$. Расстояние между проводниками $d = 20 \text{ см}$. Чему равна индукция B магнитного поля (рис .3.34): а) в точке А; б) в точке С; в) в точке D.

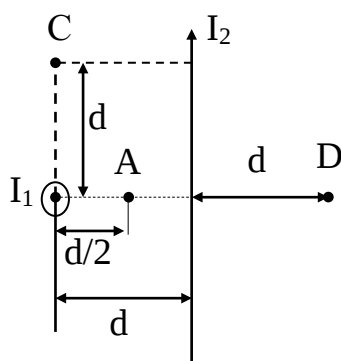


Рис.3.34

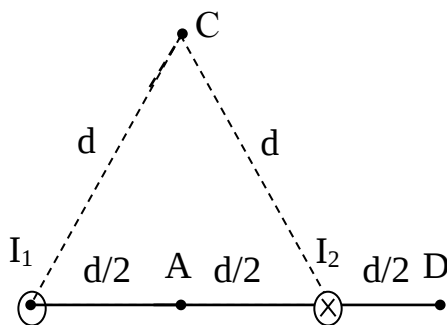


Рис. 3.35

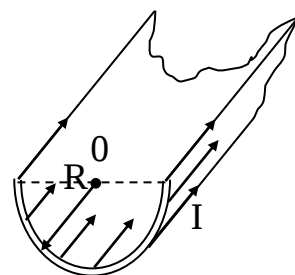


Рис. 3.36

Задача 9. По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам текут токи $I_1 = 100 \text{ A}$ и $I_2 = 50 \text{ A}$ в противоположных направлениях. Расстояние между проводниками $d = 20 \text{ см}$. Определить индукцию B магнитного поля (рис.3.35):

а) в точке А; б) в точке С; с) в точке D .

Задача 10. Ток I течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиусом R . (рис.3.36). Найти индукции магнитного поля в точке О.

Задача 11. Тонкая лента шириной $l = 40 \text{ см}$ свернута в трубку радиусом $R = 30 \text{ см}$. По ленте течет равномерно распределенный по ширине ленты ток $I = 200 \text{ A}$. Определить индукцию магнитного поля на оси трубки в средней точке.

Задача 12. По тонкому стержню длиной $l=20 \text{ см}$ равномерно распределен заряд $q = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ с}^{-1}$ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину.

Определить:

- а) индукцию магнитного поля на оси вращения стержня;
- б) магнитный момент, обусловленный вращением стержня.

Задача 13. Тонкий провод (с изоляцией) образует плоскую спираль из $N = 100$ плотно расположенных витков, по которым течет ток $I = 8 \text{ мА}$. Радиусы внутреннего и внешнего витков равны $a = 50 \text{ мм}$, $b = 100 \text{ мм}$. Найти:

- а) индукции магнитного поля в центре спирали,
- б) магнитный момент спирали при данном токе.

Задача 14. Однородный ток плотности j течет внутри неограниченной пластины толщиной $2d$ параллельно её поверхности. Найти индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния X , от средней плоскости пластины. Магнитная проницаемость всюду равна единице.

Задача 15. Прямой бесконечно длинный проводник с током I лежит в плоскости раздела двух непроводящих сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 . Найти модуль вектора индукции магнитного поля во всем пространстве в зависимости от расстояния r до провода. Иметь в виду, что линии вектора $\vec{B}$ являются окружностями с центром на оси проводника.

Задача 16. Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской границы магнетика равна B , и вектор $\vec{B}$ составляет угол θ с нормалью $\vec{n}$ к поверхности (рис.3.37). Магнитная проницаемость магнетика равна μ . Найти:

а) поток вектора $\vec{H}$ через поверхность сферы S радиусом R , центр которой лежит на поверхности магнетика (рис. 3.37а);

б) циркуляцию вектора $\vec{B}$ по квадратному контуру Γ со стороной l (рис. 3.37б).

Задача 17. Постоянный магнит имеет вид кольца с узким зазором между полюсами. Средний диаметр кольца $d = 20$ см. Ширина зазора $\delta = 2$ мм, индукция магнитного поля в зазоре $B = 40$ мТл. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти модуль вектора $\vec{H}$ магнитного поля внутри магнита.

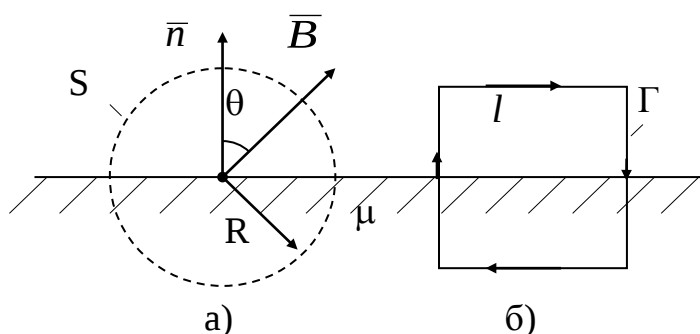


Рис. 3.37

Задача 18. На железном сердечнике в виде тора со средним радиусом $R = 250$ мм имеется обмотка с общим числом витков $N = 1000$. В сердечнике сделана поперечная прорезь шириной $\delta = 1$ мм. При токе $I = 0,85$ А через обмотку индукция магнитного поля в зазоре $B = 0,75$ Тл. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти магнитную проницаемость железа в этих условиях.

Задача 19. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 50$ А, расположена прямоугольная рамка, так что две большие стороны её длиной $l = 65$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно её ширине. Каков магнитный поток Φ , пронизывающий рамку?

Задача 20. Торойд квадратного сечения содержит $N = 1000$ витков. Наружный диаметр тороида $D = 40$ см, внутренний $d = 20$ см. Найти магнитный поток в тороиде, если сила тока I , протекающего по обмотке, равна 10 А.

Задача 21. Найти магнитный поток через поперечное сечение тороида, если ток в обмотке $I = 1,7$ А, полное число витков $N = 1000$, отношение внешнего диаметра к внутреннему $\eta = 1,6$ и толщина $h = 5$ см. Сердечник тороида прямоугольного сечения, магнитная проницаемость $\mu = 20$.

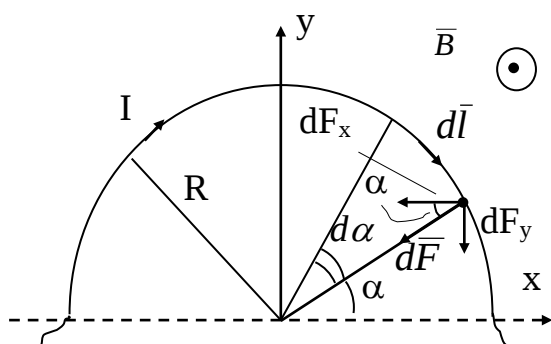
Задача 22. Тонкое железное кольцо со средним диаметром $d = 50$ см несёт на себе обмотку из $N = 800$ витков с током $I = 3$ А. В кольце имеется поперечная прорезь шириной $b = 2$ мм. Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти с помощью графика [6] магнитную проницаемость железа в этих условиях.

Задача 23. Имеется тороид прямоугольного сечения. Найти магнитный поток через это сечение, если ток в обмотке $I = 1,7$ А, полное число витков $N = 1000$, отношение внешнего диаметра к внутреннему $\eta = 1,6$ и толщина $h = 5$ см.

Задача 24. На тороид малого поперечного сечения намотано равномерно $N = 2,5 \cdot 10^3$ витков провода, по которому течет ток I . Найти отношение η индукции магнитного поля внутри тороида к индукции магнитного поля в центре тороида.

3.3.2. Действие магнитного поля на ток. Движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях

Примеры решения задач



Задача 1. Проводник в виде тонкого полукольца радиусом $R = 0,1$ м находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 5 \cdot 10^{-2}$. По проводнику течет ток $I = 10$ А. Найти силу F , действующую на проводник, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции, а подводящие провода находятся вне поля.

Решение

Выберем элемент тока, как показано на рисунке:

$$Idl = I \cdot R \cdot d\alpha,$$

положение элемента тока будем характеризовать углом α . На элемент тока действует со стороны магнитного поля сила Ампера:

$$d\vec{F} = [Id\vec{l} \vec{B}].$$

Разложим силу dF на две составляющие dF_x и dF_y и вычислим составляющие результирующей силы F_x и F_y :

$$F_x = \int dF_x = -IBR \int_0^{\pi} \cos \alpha d\alpha = 0,$$

$$F_y = \int dF_y = -IBR \int_0^{\pi} \sin \alpha d\alpha = -2IBR.$$

Результирующая сила равна:

$$F = F_y = 2IBR = 0,1 \text{ Н.}$$

Задача 2. Небольшая катушка с током, имеющая магнитный момент $\vec{p}_m$, находится на оси кругового витка радиусом R , по которому течет ток I . Найти модуль вектора силы, действующей на катушку, если её расстояние от центра витка равно X , а вектор $\vec{p}_m$ совпадает по направлению и осью витка.

Решение

Магнитное поле кругового тока является неоднородным, поэтому на магнитный момент будет действовать результирующая сила, отличная от нуля и равная:

$$\vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n}.$$

Выберем ось X вдоль оси витка, тогда направление магнитного момента совпадает с X и $p_m = p_{mx}$. Выражение силы принимает вид:

$$F = F_x = p_{mx} \cdot \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right).$$

Вычислим производную $\frac{\partial B}{\partial x}$, используя выражение для индукции магнитного поля на оси кругового тока:

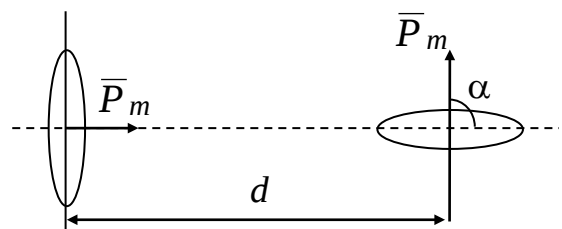
$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 R^2 \cdot I \cdot x}{(R^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Тогда :

$$F_x = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 R^2 \cdot I \cdot x \cdot p_m}{(R^2 + x^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Знак минус означает, что катушка будет втягиваться в область более сильного поля.

Задача 3. На оси контура с током, магнитный момент которого $p_m = 10^{-4} \text{ А.м}^2$, находится другой такой же контур. Магнитный момент второго контура перпендикулярен оси. Вычислить момент сил M , действующих на



второй контур. Расстояние между контурами $d = 50$ см. Размеры контуров малы по сравнению с расстоянием между ними.

Решение

Величина момента сил M , действующего на контур с током в магнитном поле, равна:

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha.$$

Так как $\alpha = \pi/2$, то:

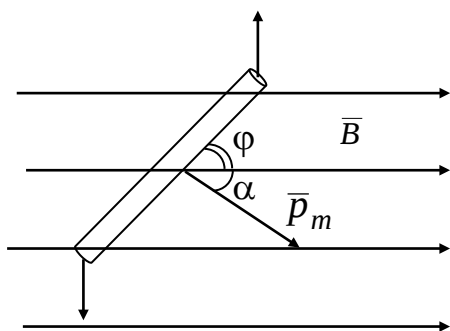
$$M = p_m \cdot B.$$

Индукцию магнитного поля B на оси первого контура с током нужно выразить через магнитный момент:

$$B = \frac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \pi R^2 I}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Учитывая, что $X = d \gg R$, получаем:

$$M = \frac{\mu_0 p_m^2}{2\pi d^3} = 8 \cdot 10^{-11} \text{ Н}\cdot\text{м}.$$



Задача 4. Квадратная рамка со стороной $a = 2$ см, содержащая 100 витков, подвешена на упругой нити с постоянной кручения $C = 10$ мкН.м/°. Плоскость рамки совпадает с направлением линий индукции внешнего магнитного поля. Определить индукции магнитного поля, если при пропускании по рамке тока $I = I$ А она повернулась на угол $\varphi = 60^\circ$, а также определить работу сил, действующих на рамку со стороны магнитного поля.

Решение

Рамка находится в равновесии при выполнении условия:

$$\sum \vec{M}_i = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = 0,$$

где $\vec{M}_1$ - момент сил, действующих на рамку с током со стороны магнитного поля; $\vec{M}_2$ - момент упругих сил, действующих на рамку:

$$M_1 = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha, \quad M_2 = C \cdot \varphi, \quad p_m = I \cdot S \cdot N = I \cdot a^2 \cdot N.$$

Используем условие равновесия, учитывая, что $\alpha = \pi/2 - \varphi$:

$$I \cdot a^2 \cdot N \cdot B \cdot \cos \varphi - C \varphi = 0.$$

Теперь можно найти величину индукции магнитного поля:

$$B = \frac{C \cdot \varphi}{I a^2 N \cos \varphi} = 30 \text{ мТл}.$$

Найдем работу сил магнитного поля по повороту рамки на угол $\varphi = 60^\circ$:

$$A = \int \delta A = - \int M d\alpha = - \int_{\pi/2}^{\pi/2 - \varphi} I a^2 N B \sin \alpha d\alpha = I a^2 N B \sin \varphi = 10^{-4} \text{ Дж.}$$

Знак минус в выражении для δA означает, что под действием момента сил M происходит убыль угла α .

Работу сил магнитного поля можно вычислить и другим способом:

$$A = I \cdot \Delta \Phi,$$

где $\Delta \Phi$ - приращение потока вектора $\vec{B}$ через поверхность контура с током I .

$$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I N a^2 B (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = I N a^2 B \sin \varphi.$$

Задача 5. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 6$ кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению поля. Индукция магнитного поля $B = 30$ мТл. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон.

Решение

На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная к скорости частицы и вектору индукции магнитного поля:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v}\vec{B}].$$

Представим скорость частицы в виде суммы двух составляющих:

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2,$$

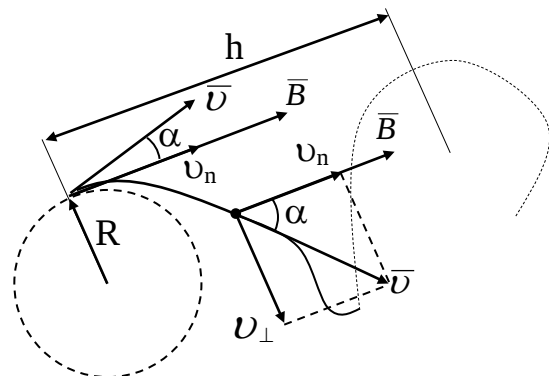
где $\vec{v}_1$ - составляющая скорости, перпендикулярная к полю, $\vec{v}_2$ - составляющая, параллельная полю. Величина силы Лоренца будет равна:

$$F_L = q v_1 B \cdot \sin \alpha = q v_1 B.$$

Так как сила Лоренца не изменяет величины скорости частицы, то частица будет двигаться в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, по окружности со скоростью v_1 и одновременно перемещаться вдоль $\vec{B}$ со скоростью v_2 . В результате движение электрона будет происходить по винтовой линии. Определим радиус винтовой линии.

$$F_L = F_{цс}, \quad \Rightarrow \quad q v_1 B = \frac{m v_1^2}{R}, \quad R = \frac{m v \cdot \sin \alpha}{q B}.$$

Шаг винтовой линии будет равен пути, пройденному электроном вдоль поля со скоростью v_2 за время, равное времени одного оборота по окружности радиусом R :



$$h = \nu_2 \cdot T, \quad T = \frac{2\pi R}{\nu_1}, \quad h = \frac{2\pi R \nu_n}{\nu_1} = \frac{2\pi m \nu_2}{qB} = \frac{2\pi m \nu \cdot \cos \alpha}{qB}.$$

Скорость электрона можно найти из условия, что его кинетическая энергия изменилась за счет работы сил электрического поля, предполагая, что начальная кинетическая энергия равна нулю:

$$\Delta K = qU, \quad \Delta K = m\nu^2/2, \quad \nu = \sqrt{2qU/m}.$$

Учитывая, что заряд электрона равен $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, а масса $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, получим

$$R = \sqrt{2Um/e} \cdot \sin \alpha / B = 4,35 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\ h = 2\pi \sqrt{2Um/e} \cdot \cos \alpha / B = 4,74 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Задачи, рекомендуемые для аудиторных занятий

Задача 1. По тонкому проводнику в виде кольца радиусом $R = 20$ см течет ток $I = 100$ А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-2}$ Тл. Чему равна сила F , растягивающая кольцо?

Ответ: $F = 0,4$ Н.

Задача 2. Квадратная рамка с током $I = 0,90$ А расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником, по которому течет ток $I_0 = 5$ А.

Сторона рамки $a = 8$ см. Проходящая через середины противоположных сторон ось рамки параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии, которое в $\eta = 1,5$ раза больше стороны рамки. Найти:

- а) силу ампера, действующую на рамку;
- б) механическую работу, которую нужно совершить для поворота рамки вокруг её оси на 180° , если токи поддерживают неизменными.

Ответ: $F = 2\mu_0 I I_0 / \pi (4\eta^2 - 1) = 0,40$ мкН, $A = 0,10$ мкДж.

Задача 3. Шины генератора представляют собой две параллельные медные полосы длиной по $l = 2$ м, отстоящие друг от друга на расстоянии $d = 20$ см. Определить силу F взаимного отталкивания шин в случае короткого замыкания, когда по ним течет ток силой $I = 10^4$ А.

Ответ: $F = 200$ Н.

Задача 4. Вдоль прямого медного проводника круглого сечения радиусом $R = 5$ мм течет ток $I = 50$ А. Найти разность потенциалов

между осью проводника и его поверхностью. Концентрация электронов проводимости у меди $\eta = 0,9 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$.

Ответ: $U = \mu_0 I^2 / 4\pi^2 R^2 \eta e$.

Задача 5. Короткий прямой магнит расположен перпендикулярно к плоскости магнитного меридиана. На оси магнита на расстоянии $r = 50 \text{ см}$ от его середины (которое много больше длины магнита) находится магнитная стрелка. Вычислить магнитный момент p_m магнита, если стрелка отклонена на угол $\alpha = 6^\circ$ от плоскости магнитного меридиана. Принять горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли равной $2 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$.

Ответ: $p_m = 1,32 \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Задача 6. Протон с кинетической энергией $T = 1 \text{ МэВ}$ влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции ($B = 1 \text{ Тл}$). Какова должна быть минимальная протяженность l поля, чтобы оно изменяло направление движения протона на противоположное?

Ответ: $l = 14,5 \text{ см}$.

Задача 7. Электрон движется по окружности радиусом $R = 1 \text{ см}$ в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$. Параллельно магнитному полю возбуждено электрическое поле напряженностью $E = 1 \text{ В/см}$. Вычислить промежуток времени Δt , в течение которого должно действовать электрическое поле, чтобы кинетическая энергия электрона возросла вдвое.

Ответ: $\Delta t = 10^{-5} \text{ с}$.

Задачи для самостоятельного решения

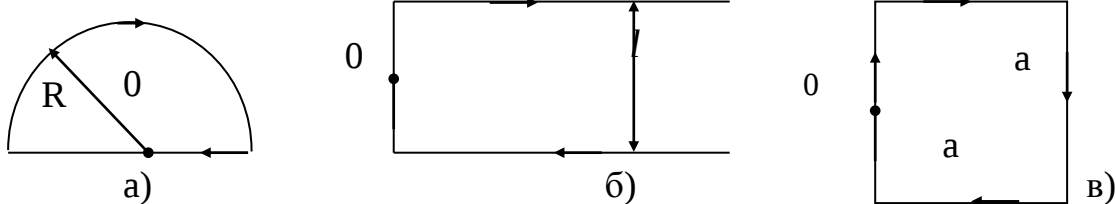


Рис. 3.38

Задача 1. Найти модуль и направление вектора силы, действующей на единицу длины тонкого проводника с током $I = 8 \text{ А}$, в точке О, если проводник изогнут:

а) рис 9а, $R = 10 \text{ см}$; б) рис. 9б, $l = 20 \text{ см}$; в) рис.9в, $a = 10 \text{ см}$.

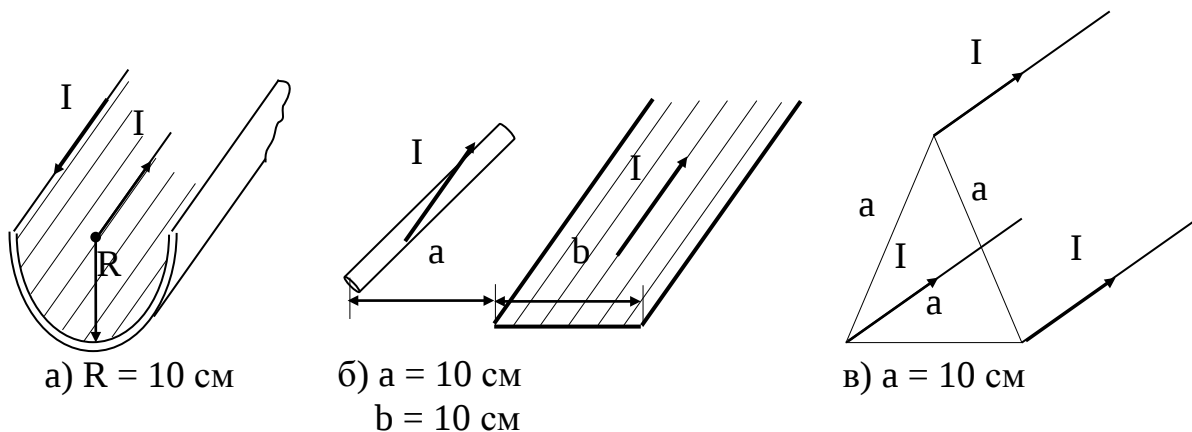


Рис. 3.39

Задача 2. Найти силу взаимодействия проводников с током в расчете на единицу их длины. Сила тока в проводниках одинакова и равна 100 А, форма проводников и их взаимное расположение показаны на рис.3.39 а - в.

Задача 3. В электромагнитном насосе для перекачки расплавленного металла участок трубы с металлом находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис.3.40). Через этот участок трубы в перпендикулярном к вектору $\vec{B}$ и оси трубы направлении пропускают ток I . Найти избыточное давление, создаваемое насосом при $B = 0,1$ Тл, $I = 10$ А и $a = 2$ см.

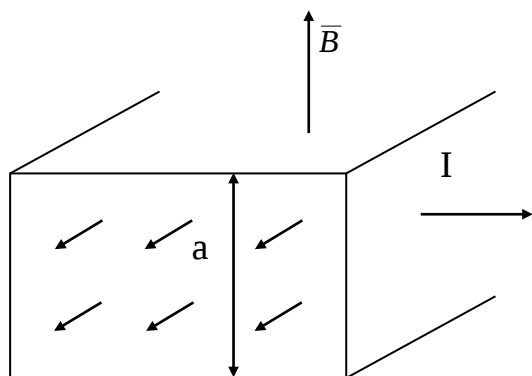


Рис. 3.40

Задача 4. При измерении эффекта Холла в натриевом проводнике напряженность поперечного поля оказалась $E = 5$ мкВ/см при плотности тока $j = 200$ А/см² и индукции магнитного поля $B = 1$ Тл. Найти концентрацию электронов проводимости и её отношение к концентрации атомов в этом проводнике.

Задача 5. Небольшой виток с током находится на расстоянии r от длинного прямого проводника с током I . Магнитный момент витка равен $\vec{p}_m$. Найти модуль и направление вектора силы, действующей на виток, если вектор $\vec{p}_m$: а) параллелен прямому проводнику; б) направлен по радиус-

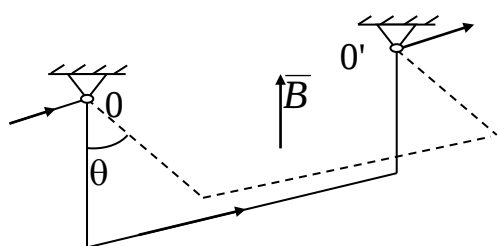


Рис. 3.41

вектору $\vec{r}$; в) совпадает по направлению с вектором $\vec{B}$ тока I в месте расположения витка.

Задача 6. Найти силу взаимодействия двух катушек с магнитными моментами $p_{m1} = 4,0$ мА · м² и $p_{m2} = 6,0$ мА · м², если их оси лежат на одной прямой и рас-

стояние между катушками, равное $l = 20$ см, значительно превышает их линейные размеры.

Задача 7. Медный провод сечением $s = 2,5 \text{ мм}^2$, согнутый в виде трех сторон квадрата, может поворачиваться вокруг горизонтальной оси $00'$ (рис.3.41). Провод находится в однородном вертикально направленном магнитном поле. Найти индукцию поля, если при пропускании по данному проводу тока $I = 16 \text{ А}$ угол отклонения $\theta = 20^\circ$.

Задача 8. По двум параллельным проводам длиной $l = 1 \text{ м}$ каждый текут токи одинаковой силы. Расстояние d между проводами равно 1 см . Токи взаимодействуют с силой $F = 1 \text{ мН}$. Найти силу тока I в проводах.

Задача 9. Круговой контур помещен в однородное магнитное поле так, что плоскость контура перпендикулярна силовым линиям поля. Напряженность магнитного поля $H = 160000 \text{ А/м}$. По контуру течет ток силой $I = 2 \text{ А}$. Радиус контура $R = 2 \text{ см}$. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть контур на 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром контура?

Задача 10. По кольцу из свинцовой проволоки диаметром $d = 10 \text{ см}$ с площадью сечения $S = 0,7 \text{ мм}^2$ идет ток $I = 7 \text{ А}$, отчего температура проволоки повышается до температуры, близкой к плавлению. Прочность свинца на разрыв при этой температуре равна $\sigma = 2 \text{ Н/мм}^2$. Разорвется ли такое кольцо, если поместить его в магнитное поле $B = 1 \text{ Тл}$ (плоскость кольца перпендикулярна к полю)?

Задача 11. Определить число N оборотов, которое должен сделать протон в магнитном поле циклотрона, чтобы приобрести кинетическую энергию, $K = 10 \text{ МэВ}$, если при каждом обороте протон проходит между дуантами разность потенциалов $U = 30 \text{ кВ}$.

Задача 12. Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии 10 см друг от друга. По проводникам течет ток в одном направлении $I_1 = 20 \text{ А}$ и $I_2 = 30 \text{ А}$. Какую работу надо совершить (на единицу длины проводников), чтобы раздвинуть эти проводники на расстояние 20 см ?

Задача 13. Из проволоки длиной 20 см сделаны контуры: квадратный и круговой. Найти вращающий момент сил, действующий на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле $B = 0,1 \text{ Тл}$. По контурам течет ток $I = 2 \text{ А}$. Плоскость каждого контура составляет угол 45° с направлением магнитного поля.

Задача 14. Катушка гальванометра, состоящая из 600 витков, подвешена на упругой нити с постоянной кручения $C = 20 \text{ мкН.м/}^\circ$ в магнитном поле напряженностью $H = 16 \cdot 10^4 \text{ А/м}$ так, что её плоскость параллельна направлению магнитного поля. Длина рамки катушки $a = 2,2 \text{ см}$ и ширина $b = 1,9 \text{ см}$. Какой ток течет по обмотке катушки, если катушка повернулась на угол $0,5^\circ$?

Задача 15. Две небольшие одинаковые катушки расположены так, что их оси лежат на одной прямой. Расстояние между катушками $l = 200$

мм значительно превышает их линейные размеры. Число витков каждой катушки $N = 100$, радиус витков $r = 10$ мм. С какой силой F взаимодействуют катушки, когда по ним течет одинаковый ток $I = 0,1$ А?

Задача 16. По достаточно длинному проводу, укрепленному горизонтально, идет ток $I = 10$ А. На каком расстоянии h от этого провода параллельно ему в той же вертикальной плоскости должен быть расположен медный провод диаметром $d = 1$ мм; длиной $l = 1$ м, чтобы силы магнитного взаимодействия уравнили массу провода, если по нему течет ток 1 А. Как должны быть направлены эти два тока? Будет ли это положение равновесия устойчивым?

Задача 17. Определить степень неоднородности магнитного поля, если максимальная сила $F_{\max}$, действующая на точечный магнитный диполь, равна 1 мН. Магнитный момент p_m диполя равен $2 \text{ мА} \cdot \text{м}^2$.

Задача 18. Ось катушки, имеющей 1000 витков диаметром 10 см, расположена горизонтально по земному магнитному меридиану. По катушке идет ток $I = 0,5$ А. Горизонтальная составляющая магнитной индукции поля Земли равна $B_2 = 20$ мкТл. Какую работу надо совершить, чтобы повернуть катушку на 180° ?

Задача 19. По двум тонким проводам, изогнутым в виде кольца радиусом $R = 10$ см, текут одинаковые токи силой $I = 10$ А в каждом. Найти силу F взаимодействия этих колец, если плоскости, в которых лежат кольца, параллельны, а расстояние d между центрами колец равно 1 мм.

Задача 20. Катушка, по которой течет ток $I = 1$ А, помещена в однородное магнитное поле так, что её ось совпадает с направлением поля. Обмотка катушки выполнена из медной проволоки диаметром $d = 1$ мм, радиус витков $R = 100$ мм. При каком значении магнитной индукции B внешнего поля обмотка катушки была бы разорвана? Прочность меди на разрыв $\sigma_p = 230$ МПа.

Задача 21. По трем прямым параллельным проводам, находящимся на одинаковом расстоянии $a = 10$ см друг от друга, текут одинаковые токи силой $I = 100$ А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силу F , действующую на отрезок длиной $l = 1$ м каждого провода.

Задача 22. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 1 кВ, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное его движению. Индукция магнитного поля $B = 1,19 \cdot 10^{-3}$ Тл. Найти: 1) радиус кривизны траектории электрона, 2) период обращения его по окружности, 3) момент импульса.

Задача 23. Электрон, ускоренный разностью потенциалов 300 В, движется параллельно прямолинейному длинному проводу на расстоянии $d = 4$ мм от него. Какая сила F действует на электрон, если по проводнику пустить ток $I = 5$ А?

Задача 24. Протон и электрон, ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле. Во сколько раз

радиус кривизны траектории протона R_1 больше радиуса кривизны траектории электрона R_2 ?

Задача 25. Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $U = 300$ В, влетает в однородное магнитное поле $B = 1,46 \cdot 10^{-5}$ Тл, направленное от чертежа к нам. Ширина поля $l = 2,5$ см, $L = 5$ см. Найти смещение пучка электронов BF (рис. 3.42.).

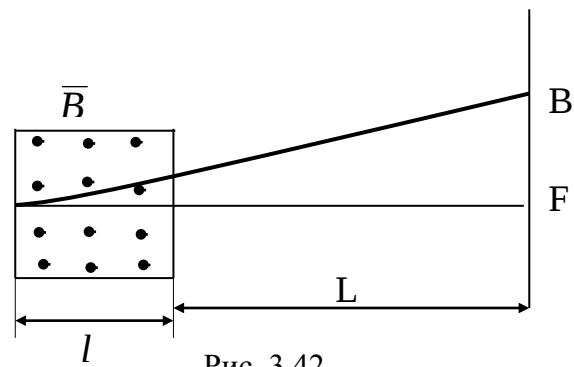


Рис. 3.42

Задача 26. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле со скоростью $v = 0,8$ С (С - скорость света в вакууме). Магнитная индукция B поля равна 0,01 Тл. Определить радиус окружности в двух случаях: 1) без учета релятивистских эффектов, 2) учитывая изменения массы со скоростью.

Задача 27. Электрон, влетевший в камеру Вильсона, оставил след в виде дуги окружности радиусом $R = 10$ см. Камера находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 10$ Тл. Определить кинетическую энергию электрона (Учесть изменение массы со скоростью).

Задача 28. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Длина конденсатора $l = 5$ см; напряженность электрического поля конденсатора $E = 100$ В/см. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле, силовые линии которого перпендикулярны силовым линиям электрического поля. Индукция магнитного поля $B = 10^{-2}$ Тл. Найти радиус винтовой траектории электрона в магнитном поле и шаг винтовой траектории электрона.

Задача 29. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 104$ В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое ($E = 10$ кВ/м) и магнитное ($B = 0,1$ Тл) поля. Найти отношение заряда частицы к её массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Задача 30. Определить энергию E , которую приобретает протон, сделав $N = 40$ оборотов в магнитном поле циклотрона, если максимальное значение U_{max} переменной разности потенциалов между дуантами равно 60 кВ. Определить также относительное $\Delta m/m_0$ увеличение массы протона в сравнении с массой покоя, а также скорость протона v .

3.3.3. Электромагнитная индукция Основные соотношения

1. Закон электромагнитной индукции Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

2. Теорема о циркуляции вектора напряженности вихревого электрического поля:

$$\oint_L \vec{E}_{\text{вихр.}} d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) d\vec{S},$$

где S - произвольная поверхность, опирающаяся на контур L .

3. Потокосцепления взаимной индукции и самоиндукции:

$$\Phi_{1,2} = L_{1,2} \cdot I_2, \quad \Phi = L \cdot I,$$

где $L_{1,2}$ - взаимная индуктивность цепей, L - индуктивность цепи.

4. Энергия магнитного поля данной электрической цепи

$$W = \frac{L \cdot I^2}{2}.$$

5. Объемная плотность энергии магнитного поля

$$\omega = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

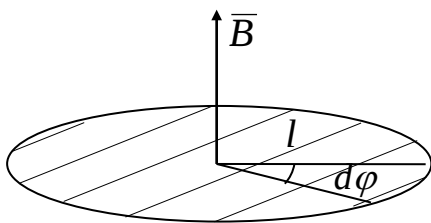
6. Энергия магнитного поля в данной области пространства

$$W = \int_{(V)} \omega dV.$$

Примеры решения задач

Задача 1. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,4$ Тл вращается стержень длиной $l = 10$ см. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через один из концов стержня перпендикулярно к его длине. Чему равна разность потенциалов на концах стержня, если он делает $n = 16$ об/с?

Решение



Разность потенциалов на концах проводника возникает вследствие явления электромагнитной индукции: возникновение э.д.с. в проводнике при его движении в магнитном поле. Так как проводник разомкнут, то по закону Ома разность потенциалов на концах проводника численно равна э.д.с., действующей на данном участке: $|\varphi_1 - \varphi_2| = |\mathcal{E}_i|$. Величина э.д.с. индукции по закону Фарадея

$$|\mathcal{E}_i| = | -d\Phi / dt |,$$

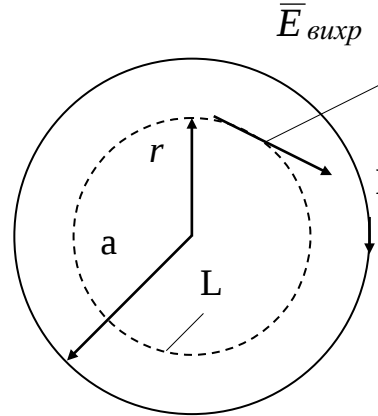
где $d\Phi$ - поток вектора магнитной индукции через поверхность, которую описывает проводник при своем движении за время dt . Найдем величину $d\Phi$ (см. рис.):

$$d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = B \cdot dS = B \cdot \frac{l^2 d\varphi}{2} = B \cdot \pi l^2 n dt.$$

Теперь можно найти разность потенциалов

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = B\pi^2 n = 0,2 \text{ В.}$$

Задача 2. В длинном прямом соленоиде с радиусом сечения a и числом витков на единицу длины n изменяют ток с постоянной скоростью (dI/dt) А/с. Найти модуль вектора напряженности вихревого электрического поля как функцию расстояния r от оси соленоида.



Решение

Изменяющийся ток в соленоиде создает изменяющееся магнитное поле внутри соленоида, которое, в свою очередь, порождает вихревое электрическое поле. Для решения задачи воспользуемся теоремой о циркуляции вектора напряженности вихревого электрического поля:

$$\oint_{(L)} \vec{E}_{вихр} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \left(\int_{(S)} \vec{B} d\vec{S} \right),$$

где L - контур интегрирования, S - поверхность, натянутая на контур L .

В качестве контура интегрирования возьмем окружность радиуса r , тогда вектора $\vec{E}_{вихр}$ и $d\vec{l}$ будут направлены вдоль одной прямой, а значение вектора $\vec{E}_{вихр}$ будет одно и тоже для всех точек окружности. Учитывая, что поле соленоида однородно, направлено перпендикулярно плоскости контура и отлично от нуля только внутри соленоида, получаем при $r \leq a$

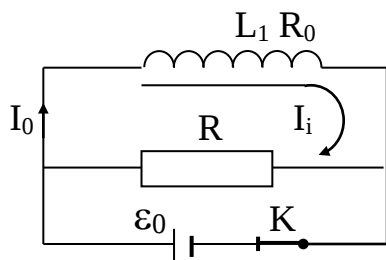
$$\oint \vec{E}_{вихр} d\vec{l} = E_{вихр} \int_0^{2\pi} dl = E_{вихр} \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \int_0^{2\pi^2} dS = -\frac{d}{dt} (\mu_0 n I) \pi r^2,$$

$$E_{вихр} = -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} r.$$

при $r \geq a$

$$E_{вихр} \cdot 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \int_0^{\pi a^2} dS = -\frac{d}{dt} (\mu_0 n I) \pi a^2,$$

$$E_{вихр} = -\frac{1}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt} \frac{a^2}{r}.$$



Задача 3. Соленоид с индуктивностью $L = 10^{-1}$ Гн и сопротивлением $R_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ Ом включен в электрическую цепь (см. рис.)

$R = 2 \cdot 10^{-2}$ Ом, $\varepsilon_0 = 2$ В. Найти, какое количество электричества пройдет по соленоиду при размыкании ключа K ?

Решение

При замкнутом ключе K по соленоиду протекает ток $I_0 = \varepsilon_0 / R_0$.

При размыкании ключа K ток в соленоиде и обусловленный им магнитный поток начнут уменьшаться. Возникшая в соленоиде э.д.с. индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

создает индукционный ток I_i , протекающий по соленоиду и сопротивлению R . Индукционный ток перенесёт количество электричества через соленоид:

$$q = \int_0^{\infty} I_i dt.$$

Сила электрического тока может быть определена по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R_0 + R} = \frac{-d\Phi / dt}{R_0 + R}.$$

Подставляя в выражение для заряда, получаем

$$q = -\int_0^{\infty} \frac{1}{R_0 + R} \frac{d\Phi}{dt} dt = -\int_{\Phi_0}^0 \frac{d\Phi}{R_0 + R} = \frac{\Phi_0}{R_0 + R}.$$

С учетом того, что $\Phi_0 = L I_0$ (потокосцепление самоиндукции в начальный момент времени), окончательно находим

$$q = \frac{L I_0}{R_0 + R} = \frac{L \varepsilon_0}{(R_0 + R) R_0} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ Кл.}$$

Задача 4. Два concentric тонких проводника в форме окружностей с радиусами a и b лежат в одной плоскости. Имея в виду, что a значительно меньше b , найти:

1) их взаимную индуктивность;

2) магнитный поток, который пронизывает поверхность, натянутую на внешний проводник, когда по внутреннему проводнику течет ток I .

Решение

1. Для нахождения взаимной индуктивности воспользуемся выражением, определяющим потоко-сцепление взаимной индукции:

$$\Phi_{ab} = L_{ab} \cdot I_b,$$

где Φ_{ab} - магнитный поток, сцепленный с контуром a и обусловленный током I_b , протекающим по контуру b . С другой стороны, магнитный поток может быть вычислен по общему правилу:

$$\Phi_{ab} = \int \vec{B}_b d\vec{S}_a.$$

Так как $a \ll b$, то значение B_b можно считать постоянным в пределах круга радиусом a , равным индукции в центре кругового тока радиусом b и направленным по нормали к поверхности контура. Учитывая это, получаем:

$$\Phi_{ab} \cong B_b \int_{(S_a)} dS_a = B_b \cdot S_a = B_b \pi a^2 = \frac{\mu_0 I_b}{2b} \pi a^2.$$

Отсюда

$$L_{ab} = \frac{\Phi_{ab}}{I_b} \cong \frac{\mu_0 \pi a^2}{2b}.$$

2. Для нахождения магнитного потока через поверхность контура "б" Φ_{ba} при протекании тока I по контуру "а" воспользуемся тем, что $L_{ab} = L_{ba}$. Тогда

$$\Phi_{ba} = L_{ba} \cdot I_a.$$

Подставляя значение L_{ba} и $I_a = I$, находим

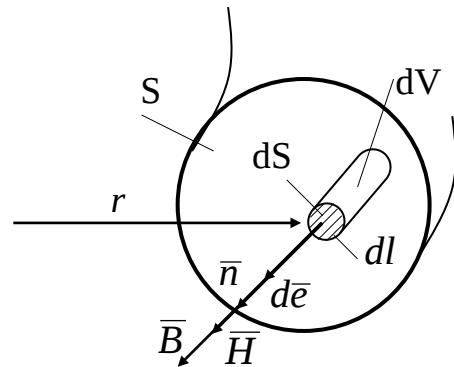
$$\Phi_{ba} \cong \frac{\mu_0 \pi a^2 I}{2b}.$$

Задача 5. На железный тор намотано $N = 500$ витков. Найти энергию магнитного поля, если при токе $I = 2$ А магнитный поток через поперечное сечение тора $\Phi = 1$ мВб.

Решение

Для нахождения энергии магнитного поля учтем, что магнитное поле тороида сосредоточено в пределах железного сердечника, а энергия поля может быть вычислена через плотность энергии:

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{BH}{2} dV.$$



Выделим элемент объема в виде прямого цилиндра, расположенного на расстоянии r от центра тороида с образующей dl , направленной по касательной к окружности радиусом r и площадью основания dS . Тогда элемент объема $dV = dS \cdot dl$. Интеграл по объему можно представить в следующем виде:

$$W = \int_V \frac{BH}{2} dV = \frac{1}{2} \int_S \vec{B} d\vec{S} \int_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{1}{2} \int_S \vec{B} d\vec{S} \oint_L \vec{H} d\vec{l}.$$

По теореме о циркуляции вектора $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = IN.$$

По определению магнитного потока

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}.$$

Используя это, получим

$$W = \frac{1}{2} \Phi NI = 0,5 \text{ Дж.}$$

Задачи, рекомендуемые для аудиторных занятий

Задача 1. Прямой проводник длиной $l = 10$ см помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл. Концы проводника замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи $r = 0,4$ Ом. Какая мощность P потребуется для того, чтобы двигать проводник перпендикулярно линиям индукции со скоростью $v = 20$ м/с?

Ответ: $P = 10$ Вт.

Задача 2. В магнитном поле, индукция которого изменяется по закону $\vec{B} = (\alpha + \beta t^2) \cdot \vec{i}$, где $\alpha = 10^{-1}$ Тл, $\beta = 10^{-2}$ Тл/с², $\vec{i}$ - орт оси ОХ, расположена квадратная рамка со стороной $a = 20$ см, причем плоскость рамки перпендикулярна $\vec{B}$. Определить э.д.с. индукции в рамке в момент времени $t = 5$ с.

Ответ: $\mathcal{E}_i = 4 \cdot 10^{-3}$ В.

Задача 3. Между полюсами электромагнита помещена катушка, соединенная с баллистическим гальванометром. Ось катушки параллельна линиям индукции. Катушка имеет $N = 15$ витков площадью $S = 2$ см². Сопротивление катушки $r_1 = 4$ Ом, сопротивление гальванометра $r_2 = 46$ Ом. Когда ток в обмотке электромагнита включили, по цепи гальванометра протекло количество электричества $q = 9 \cdot 10^{-5}$ Кл. Вычислить магнитную индукцию B поля электромагнита.

Ответ: $B = 1,5$ Тл.

Задача 4. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением R изменяется в течение времени τ по закону $\Phi = at(\tau - t)$. Найти количество тепла, выделившееся в контуре за это время. Индуктивностью контура пренебречь.

Ответ: $Q = \left(\frac{1}{3}\right) \frac{a^2 \tau^3}{R}$.

Задача 5. Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет $N_1 = 251$ виток. Средний диаметр тороида $D_{cp} = 8$ см, диаметр витков $d = 2$ см. На тороид намотана вторичная обмотка, имеющая $N_2 = 100$ витков. При замыкании первичной обмотки в ней в течение $t = 0,001$ с устанавливается ток силой $I = 3$ А. Найти среднее значение э.д.с. индукции во вторичной обмотке.

Ответ: $\mathcal{E}_i = 0,118$ В.

Задача 6. Вычислить взаимную индуктивность длинного прямого провода и прямоугольной рамки со сторонами a и b . Рамка и прямой провод лежат в одной плоскости, причем ближайшая к проводу сторона рамки длиной b параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии l .

Ответ: $L_{1,2} = \left(\frac{\mu_0 b}{2\pi}\right) \ln\left(1 + \frac{a}{l}\right)$.

Задача 7. При некоторой силе тока плотность энергии магнитного поля соленоида (без сердечника) $\omega = 0,2$ Дж/м³. Во сколько раз увеличится плотность энергии поля при той же силе тока, если соленоид будет иметь железный сердечник?

Ответ: в 1600 раз.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. В однородном магнитном поле, индукция которого $B = 0,1$ Тл, находится прямой проводник длиной $l = 20$ см. Концы проводника замкнуты проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи $r = 0,1$ Ом. Найти силу, которую нужно приложить к проводнику, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям индукции со скоростью $v = 2,5$ м/с.

Задача 2. Провод, имеющий форму параболы $y = ax^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией B , причем вектор $\vec{B}$ перпендикулярен к плоскости x, y . Из вершины параболы в момент $t = 0$ начинают перемещать поступательно перемычку с постоянным ускорением ω (см. рис. 3.41). Найти э.д.с. индукции в образовавшемся контуре как функцию y .

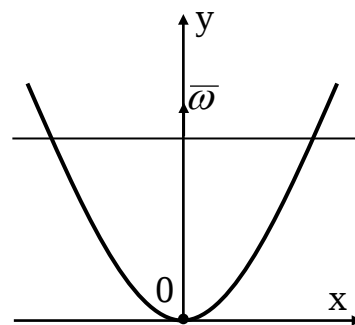


Рис. 3.41

Задача 3. Провод с сопротивлением R на единицу длины изогнут, как показано на рис. 3.42, а, б, в. Перемычка из такого же провода образует с изогнутым проводником замкнутый контур. Контур помещен в однородное магнитное поле B , перпендикулярное к его плоскости. Найти направление и силу тока I , текущего в контуре, когда перемычка движется с постоянной скоростью u . Сопротивлением в местах контакта 1 и 2 пренебречь.

Задача 4. Рамка площадью $S = 200 \text{ см}^2$ равномерно вращается относительно оси ($n = 10 \text{ об/с}$), лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0,2 \text{ Тл}$). Каково среднее значение э.д.с. индукции за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения?

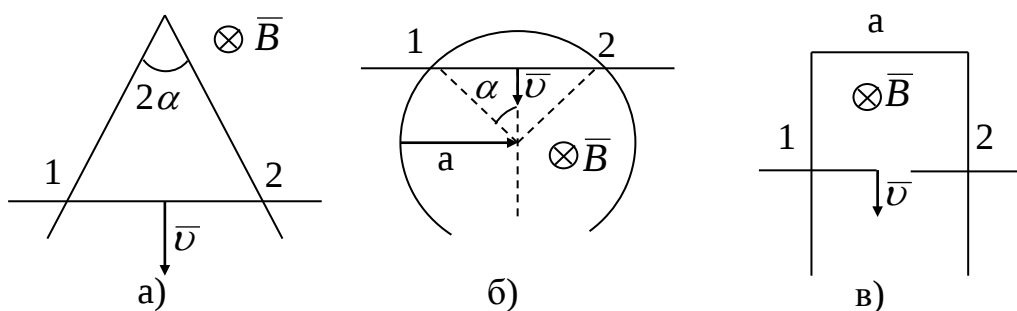


Рис. 3.42

Задача 5. Тонкий металлический стержень длины $l = 1200 \text{ мм}$ вращается в однородном магнитном поле вокруг перпендикулярной к стержню оси, отстоящей от одного из его концов на расстояние $l_1 = 250 \text{ мм}$, делая $n = 120 \text{ об/мин}$. Вектор магнитной индукции параллелен оси вращения и имеет величину $B = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$. Найти разность потенциалов U , возникающую между концами стержня.

Задача 6. Рамка площадью $S = 100 \text{ см}^2$ содержит $N = 10^3$ витков провода сопротивлением $r_1 = 12 \text{ Ом}$. К концам обмотки подключено внешнее сопротивление $r_2 = 20 \text{ Ом}$. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле $B = 0,1 \text{ Тл}$, делая $n = 8 \text{ об/с}$. Чему равно максимальное значение мощности переменного тока в цепи?

Задача 7. Изолированный металлический диск радиусом $R = 250 \text{ мм}$ вращается со скоростью $n = 1000 \text{ об/мин}$. Найти разность потенциалов U между центром и краем диска, возникающую

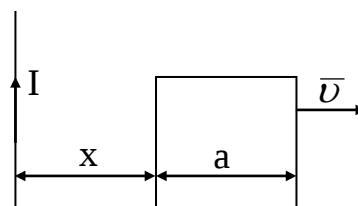
- а) в отсутствие магнитных полей;
- б) когда имеется перпендикулярное к диску однородное магнитное поле с индукцией $B = 1 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$.

Задача 8. Индукция магнитного поля между полюсами двухполюсного генератора $B = 0,8 \text{ Тл}$. Ротор имеет $N = 100$ витков площадью $S = 400 \text{ см}^2$. Сколько оборотов в минуту делает ротор, если максимальное значение э.д.с. индукции $\mathcal{E}_i = 200 \text{ В}$.

Задача 9. Длинный прямой проводник с током I и П - образный проводник расположены в одной плоскости. Перемычку, длина которой l и сопротивление R , перемещают вправо с постоянной скоростью v . Найти ток, индуцируемый в контуре, как функцию расстояния r между перемычкой и прямым проводником. Сопротивлением П - образного проводника и самоиндукцией контура пренебречь.

Задача 10. Короткая катушка, содержащая $N = 10$ витков, равномерно вращается с угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям поля. Магнитное поле однородное, с индукцией $B = 0,04$ Тл. Определить мгновенное значение э.д.с. индукции для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с линиями поля. Площадь катушки $S = 100$ см²

Задача 11. Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I расположены в одной плоскости. Рамку перемещают поступательно от провода с постоянной скоростью v . Найти э.д.с. индукции в рамке как функцию расстояния X .



Задача 12. Проволочное кольцо радиусом $R = 10$ см лежит на столе. Какое количество электричества q протечёт по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца $r = 1$ Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 5 \cdot 10^{-5}$ Тл.

Задача 13. Квадратная проволочная рамка со стороной a и прямой проводник с постоянным током I лежат в одной плоскости. Сопротивление рамки R . Рамку повернули на 180° относительно дальней от провода стороны рамки, находящейся на расстоянии $b > a$ от провода и параллельной ему. Найти количество электричества, протекшее в рамке.

Задача 14. В проволочное кольцо, присоединенное к баллистическому гальванометру, вставили прямой магнит. По цепи протекло количество электричества $q = 10^{-5}$ Кл. Определить магнитный поток Φ , пересеченный кольцом, если сопротивление цепи гальванометра $r = 30$ Ом.

Задача 15. Тонкий медный проводник массой $m = 1$ г согнут в виде квадрата и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле $B = 0,1$ Тл так, что плоскость его перпендикулярна линиям поля. Определить количество электричества q , которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

Задача 16. П-образный проводник находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости проводника и изменяющемся во времени со скоростью $dB/dt = 0,1$ Тл/с. Вдоль параллельных сторон этого проводника перемещают без начальной скорости проводник-перемычку с ускорением $\omega = 10$ см/с². Длина перемычки $l = 20$ см. Найти э.д.с. индукции в контуре через $t = 2$ с после начала перемещения, если в момент $t = 0$

площадь контура и индукция магнитного поля равны нулю. Индуктивностью контура пренебречь.

Задача 17. По длинному прямому проводнику течет ток, вблизи проводника расположена квадратная рамка из тонкого провода сопротивлением $r = 0,02$ Ом. Проводник лежит в плоскости рамки и параллелен двум её сторонам, расстояния до которых от провода соответственно $a_1 = 10$ см, $a_2 = 20$ см. Найти силу тока в проводнике, если при его включении через рамку протекло количество электричества $q = 6,93 \cdot 10^{-4}$ Кл.

Задача 18. В длинном прямом соленоиде с радиусом сечения a и числом витков на единицу длины n изменяют ток с постоянной скоростью (dI/dt) А/с. Найти модуль вектора напряженности вихревого электрического поля как функцию расстояния r от оси соленоида. Изобразить примерный график этой зависимости.

Задача 19. На длинный соленоид с радиусом сечения a плотно надето тонкое проволочное кольцо в изоляции, причем одна половина кольца имеет сопротивление в η раз больше, чем другая. Индукция магнитного поля в соленоиде изменяется во времени по закону $B = v \cdot t$, где v - постоянная. Найти модуль вектора напряженности электрического поля в кольце.

Задача 20. Тонкое непроводящее кольцо массой m , имеющее заряд q , может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоилось и магнитное поле отсутствовало. Затем включили практически однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости кольца, которое стало нарастать во времени по некоторому закону $\vec{B}(t)$. Найти угловую скорость $\vec{\omega}$ кольца в зависимости от индукции $\vec{B}(t)$.

Задача 21. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением R изменяется в течение времени t по закону $\Phi = at(\tau - t)$. Найти среднюю мощность, выделяемую в контуре за это время. Индуктивностью контура пренебречь.

Задача 22. Найти индуктивность соленоида длиной l , обмоткой которого является медная проволока массой m . Сопротивление обмотки R . Диаметр соленоида значительно меньше его длины.

Задача 23. Вычислить постоянную времени τ прямого соленоида длиной $l = 1$ м, имеющего однослойную обмотку из медного провода массой $m = 1$ кг. Предполагается, что диаметр сечения соленоида значительно меньше его длины. Постоянная времени $\tau = R/L$.

Задача 24. Определить индуктивность двухпроводной линии на участке длиной $l = 1$ км. Радиус провода $R = 1$ мм, расстояние между осевыми линиями $d = 0,4$ м.

Задача 25. Определить индуктивность тороидального соленоида из N витков, внутренний радиус которого равен a , а поперечное сечение имеет форму квадрата со стороной a . Пространство внутри соленоида заполнено однородным парамагнетиком с магнитной проницаемостью μ .

Задача 26. Обмотка соленоида с железным сердечником содержит 500 витков. Длина сердечника $l = 50$ см. Как и во сколько раз изменится индуктивность соленоида, если сила тока, протекающего по обмотке, возрастет от $I_1 = 0,1$ А до $I_2 = 1$ А?

Задача 27. Замкнутая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянной э.д.с. $\mathcal{E}$ и дросселя индуктивности L . Активное сопротивление всей цепи равно R . В момент времени $t = 0$ индуктивность дросселя скачком уменьшили в η раз. Найти ток в цепи как функцию времени t . Учесть, что при скачкообразном изменении индуктивности полный магнитный поток (потокосцепление) остается неизменным.

Задача 28. Вычислить взаимную индуктивность длинного прямого провода и прямоугольной рамки со сторонами a и b . Рамка и провод лежат в одной плоскости, причем ближайшая к проводу сторона рамки длиной a параллельна проводу и отстоит от него на расстоянии l .

Задача 29. Определить взаимную индуктивность тороидальной катушки и проходящего по ее оси прямого бесконечного провода. Катушка имеет прямоугольное сечение, ее внутренний радиус a , внешний - b . Длина стороны поперечного сечения тора, параллельная проводу, равна h . Число витков катушки N . Система находится в однородном магнетике с проницаемостью μ .

Задача 30. Индукция магнитного поля тороида с железным сердечником возросла от $B_1 = 0,5$ Тл до $B_2 = 1$ Тл. Найти, во сколько раз изменилась объемная плотность энергии магнитного поля.

Задача 31. Два длинных коаксиальных соленоида содержат n_1 и n_2 витков на единицу длины. Внутренний соленоид, имеющий площадь поперечного сечения S , заполнен магнетиком с проницаемостью μ . Найти взаимную индуктивность соленоидов в расчёте на единицу их длины.

Задача 32. Ток I течет по длинному прямому проводнику круглого сечения с магнитной проницаемостью μ . Найти энергию магнитного поля внутри провода в расчете на единицу его длины.

Задача 33. Железный сердечник, имеющий форму тора с круглым сечением радиусом $R = 3$ см, несёт на себе обмотку из $N = 1000$ витков, по которой течет ток $I = 1$ А. Средний радиус тора $a = 32$ см. Найти магнитную энергию, запасенную в сердечнике, полагая напряжённость поля H одинаковой по всему сечению и равной её значению в центре сечения.

Задача 34. Длинный цилиндр радиусом R , заряженный равномерно по поверхности, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти энергию магнитного поля на единицу длины цилиндра, если линейная плотность заряда цилиндра равна λ и $\mu = 1$.

Задача 35. Найти энергию взаимодействия двух контуров с токами I_1 и I_2 , если оба контура имеют вид окружностей радиусами a и b ($a \ll b$), центры этих контуров находятся в одной точке, и плоскости контуров составляют друг с другом угол θ .

Варианты индивидуального задания

№ варианта	Тема №1	Тема №2	Тема №3
1	1 ,11,14	1a,25,5a	1,30,12
2	2,12a,15	1б,26,5б	2,31,13
3	3,12б,16a	1б,27,5в	3,32,14
4	4a,13a,16б	2a,28,6	4,33,15
5	4б,13б,17	2б,29,7	5,24,17
6	4в,14,18	2б,24,9	6,35,21
7	5a,15,19	3,11,10	7,12,22
8	5б,16a,20	4,22,12	8,13,23
9	5в,16б,21	5a,23,13	9,14,24
10	6a,17,12a	5б,9,14	10,15,25
11	6б,18,12б	5в,22,15	11,17,26
12	6в,19,13	6,18,11	16,21,27
13	7a,20,11	7,4,22	18,22,12
14	7б,21,10	8,22,9	19,23,13
15	7в,22,16a	9,23,7	20,24,14
16	8a,23,16б	10,24,3	12,30,1
17	6б,24,12a	21,25,9.	13,31,2
18	8в,16б,19	12,26,17	14,32,3
19	9a,17,21	13,27,3	15,33,4
20	9б,18,23	14,28,4	17,34,5
21	9в,19,15	15,29, 1a	21,35,6
22	10,20,2	16,1a,9	22,1,30
23	11, 1,18	17,16,12	23,2,31
24	12a,2,17	18, 1в, 13	24,3,32
25	12б,3,22	19,2a,18	25,4,33
26	13a,4a,24	20.2б,12	26,5,34
27	13б,4б,21	11,2в,9	27,6,35
28	14,4в,20	22,3,12	28,7,12
29	15,5a,24	23,4,18	29,8,13
30	16a,5б,19	30,5,15	24,9,14

ГЛАВА 4. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

4.1. Интерференция и дифракция света

Основная задача при изучении интерференции света сводится к расчёту интерференционной картины. Рассчитать эту картину - значит найти распределение интенсивности электромагнитных волн в пространстве. Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды напряженности E_0 , электрического поля электромагнитной волны. Основная задача при анализе интерференции света заключается в нахождении амплитуды E_0 результирующего колебания в произвольной точке среды.

В большинстве случаев при расчете интерференционной картины необходимо определить положение произвольного k -го максимума (или минимума) и расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами). Метод решения задач на интерференцию света чаще всего сводится к двум основным этапам: нахождения оптической разности хода σ и применения условия максимума $\delta = k\lambda$ или минимума $\delta = (2k + 1)\lambda/2$, где $k = 0, 1, 2, \dots$

1. При интерференции двух когерентных волн расстояние между возникающими на экране двумя соседними интерференционными полосами выражается соотношением

$$\Delta l = L \cdot \lambda / d,$$

где L - расстояние от экрана до источника света; d - расстояние между источниками света.

2. При отражении от плоскопараллельной пластинки, находящейся в воздухе, оптическая разность хода световых волн равна:

$$\delta = 2d \cdot n \cdot \cos \gamma - \lambda/2,$$

где d - толщина пластины; α - угол падения лучей; γ - угол преломления; n - показатель преломления пластины. Можно найти δ как

$$\delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \lambda/2.$$

3. Условие максимумов интенсивности световых волн при интерференции

$$\delta = \pm k\lambda,$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ Условие минимумов

$$\delta = \pm (2k + 1)\lambda/2.$$

4. Радиусы светлых и тёмных колец Ньютона

$$r_k = \sqrt{R \cdot \lambda (k - 1) / 2},$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ В отраженном свете чётным k соответствуют радиусы световых колец, нечетным - тёмных, в проходящем свете - наоборот.

Основная задача при изучении дифракции заключается в расчёте дифракционной картины, т.е. в нахождении распределения интенсивности

света. Более узкой задачей является нахождение положения максимумов и минимумов дифракционного спектра.

5. Радиус κ -й зоны Френеля при прохождении сферической волны через круглое отверстие

$$\rho_{\kappa} = \sqrt{a \cdot b \cdot \kappa \cdot \lambda / (a + b)},$$

где a – расстояние диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника света; b – расстояние диафрагмы от экрана, на котором наблюдается дифракционная картина; κ - номер зоны Френеля.

6. Условие главных максимумов интенсивности в случае френгофровой дифракции на дифракционной решетке при нормальном падении лучей:

$$(a + b) \cdot \sin \varphi = \pm \kappa \cdot \lambda,$$

где $(a + b)$ - период решетки; κ - номер главного максимума; φ - угол дифракции.

7. Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_{\varphi} = \frac{\delta \varphi}{\delta \lambda} = \frac{\kappa}{((a + b) \cos \varphi)},$$

где $\delta \varphi$ - угловое расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta \lambda$.

8. Линейная дисперсия дифракционной решетки

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta \lambda},$$

где δl – линейное расстояние между спектральными линиями, отличающимися по длине волны на $\delta \lambda$. Для малых углов дифракции

$$D_l \approx F \cdot D_{\varphi},$$

где F -фокусное расстояние линзы.

9. Разрешающая сила объектива телескопа

$$R = D / (1,22 \cdot \lambda),$$

где D - диаметр входного зрачка объектива.

10. Формула Вульфа-Брэггов:

$$2d \sin \varphi = \kappa \lambda,$$

где d - расстояние между атомными плоскостями кристалла; φ - угол скольжения; κ - порядок спектра.

Примеры решения задач

Задача 1. Рассчитать интерференционную картину от двух когерентных источников А и В (рис.1), расположенных на расстоянии $d = 5$ мм друг от друга и на расстоянии $L = 6$ м от экрана. Длина волны источников в вакууме $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Определить также положение на экране пятого максимума и расстояние между соседними максимумами. Среда – вакуум.

Решение

До встречи в произвольной точке M экрана (рис.4.1), в которой оценивается результат интерференции, каждая из волн, идущих от когерентных источников A и B , проходит соответствующий геометрический путь; $AM = x_1$ и $BM = x_2$. Для простоты предполагаем начальные фазы равными нулю, а амплитуды - одинаковыми. Запишем уравнения волн, идущих от данных источников:

$$E_1 = E_{01} \sin(2\pi\nu \cdot t - 2\pi x_1 / \lambda),$$

$$E_2 = E_{02} \sin(2\pi\nu \cdot t - 2\pi x_2 / \lambda).$$

По принципу суперпозиции результирующее колебание в точке M

$$E = E_1 + E_2 = 2E_{01} \cos[\pi(x_1 - x_2)/\lambda] \cdot \sin[2\pi\nu \cdot t - \pi(x_1 - x_2)/\lambda]$$

является гармоническим с той же частотой ν , но с амплитудой

$$E_0 = 2E_{01} \cos[\pi(x_1 - x_2)/\lambda].$$

Эта амплитуда зависит от параметра $\pi(x_1 - x_2)/\lambda = \pi \cdot \delta / \lambda$.

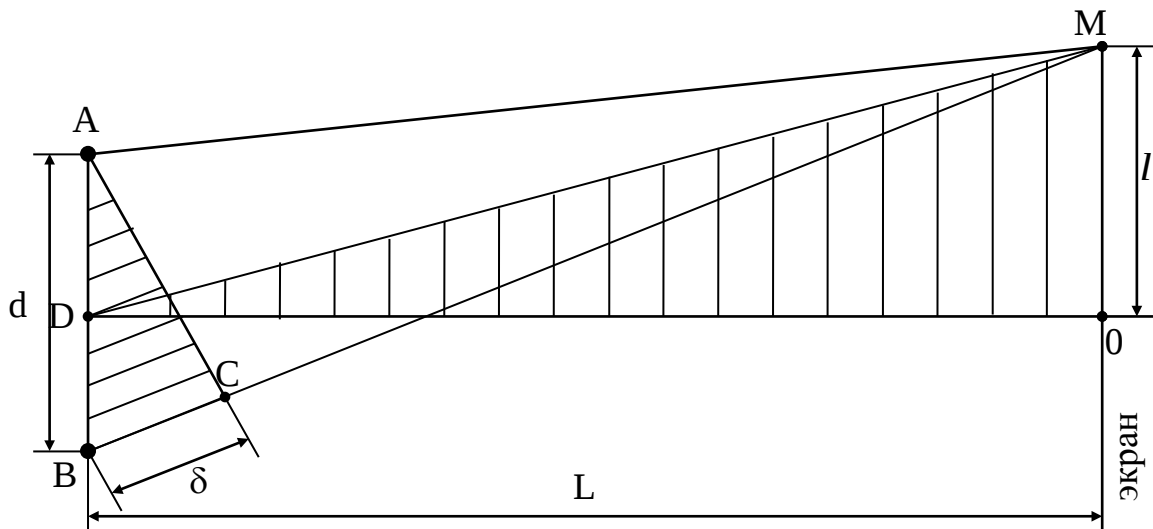


Рис. 4.1

Распределение интенсивности света на экране

$$J = E_0^2 = 4J_{01} \cos^2(\pi \cdot \delta / \lambda) = 4J_{01} \cos^2(\pi \cdot \delta / \lambda)$$

или

$$J = 2J_{01} [1 + \cos(2\pi \cdot \delta / \lambda)].$$

Свяжем разность хода δ с координатой l точки M на экране. Из подобия треугольников

$$\triangle ABC \text{ и } \triangle DMO \quad \delta / d = l / (DM).$$

Учитывая, что $DM \approx DO \approx L$ (при условии, что $L \gg d$), находим

$$\delta / d = l / L. \quad \text{Отсюда} \quad \delta = d \cdot l / L.$$

Таким образом, окончательное распределение интенсивности

$$J = 2J_{01} \left[1 + \cos \frac{2\pi d \cdot l}{\lambda \cdot L} \right].$$

Учитывая условия максимума $\delta = \kappa \lambda$, определяем положение l_{κ} 5-го максимума:

$$l_{\kappa} = L \cdot \delta / d = L \cdot \kappa \cdot \lambda / d, l_{\kappa} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Расстояние между соседними максимумами:

$$\Delta l = l_{(\kappa+1)} - l_{\kappa} = L \cdot \lambda / d; \quad \Delta l = 6 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Задача 2. Точечный источник света S с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м расположен на расстоянии $r = 10$ см от линии пересечения двух плоских зеркал, угол между которыми $\alpha = 20'$ (бизеркала Френеля). Определить число светлых полос интерференционной картины, получающейся на экране, удаленном от линии пересечения зеркал на расстоянии $l = 190$ см (рис. 4. 2).

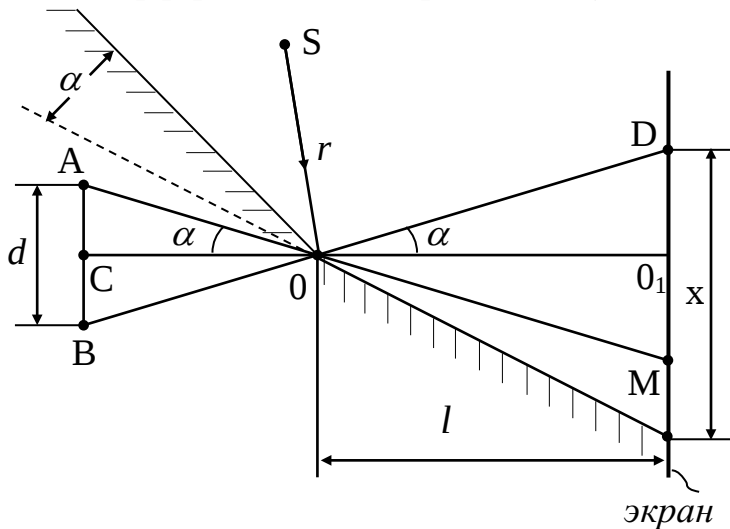


Рис. 4.2

линии пересечения зеркал на расстоянии $l = 190$ см (рис. 4. 2).

Решение

Интерференционная картина получается от двух когерентных источников А и В. Эти источники являются мнимыми изображениями источника света S в двух плоских зеркалах. Определим расстояние d между источниками:

$$d = 2|AC| = 2|AO| \sin \alpha = 2r \cdot \alpha,$$

так как угол α мал и $\sin \alpha \approx \alpha$, расстояние между двумя светлыми соседними полосами (см. задачу 1)

$$\Delta x = \lambda \cdot L / d = \lambda \cdot (l + r) / 2r \cdot \alpha,$$

где $(l + r) \approx L$ - расстояние от источников до экрана. Ширина интерференционной полосы определяется областью, где происходит перекрытие волн, излучаемых источниками А и В.

Из рис.2 видно, что ширина интерференционной картины изображается отрезком

$$|DM| = x = 2|O_1D| = 2l \cdot \tan \alpha \approx 2l \cdot \alpha.$$

Число N светлых полос получим, разделив ширину x интерференционной картины на ширину светлой полосы Δx :

$$N = \frac{4\alpha^2 \cdot r \cdot l}{\lambda \cdot (l + r)}; \quad N = 26.$$

Задача 3. На стеклянный клин с малым углом нормально к его нижней грани падает параллельный пучок лучей монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6}$ м. Число m возникающих при этом интерференционных полос, приходящихся на $l = 1$ см, равно 10. Определить угол α клина.

Решение

Лучи отражаются как от верхней, так и от нижней граней. Эти лучи когерентны. Поэтому на поверхности клина будут наблюдаться интерференционные полосы. Так как угол клина мал, то отражённые лучи 1 (от верхней

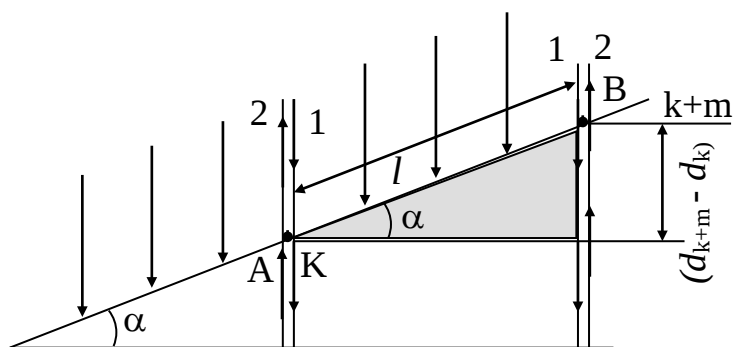


Рис. 4.3

и 2 (от нижней грани) (рис.4.3) будут практически параллельны. Тёмные полосы видны на трёх участках поверхности клина, для которых разность хода лучей кратна нечётному числу половин длин волн:

$$\delta = (2k + 1) \cdot \lambda / 2,$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Разность хода δ двух лучей складывается из разности оптических длин путей $2d \cdot n \cdot \cos \gamma$ этих лучей и половины длины волны $\lambda / 2$. γ - угол отражения от нижней грани. Величина $\lambda / 2$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении луча 1 от оптически более плотной среды. Окончательно (выражая дважды) значение разности хода δ лучей, получим

$$2d_k \cdot n \cdot \cos \gamma + \lambda / 2 = (2k + 1) \cdot \lambda / 2, \quad (1)$$

где n - показатель преломления стекла; d_k - толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k .

Согласно условию, угол клина мал, следовательно, и угол отражения γ мал, и $\cos \gamma = 1$. После преобразования выражения (1) получим

$$2d_k \cdot n = k\lambda. \quad (2)$$

Пусть произвольной темной полосе номера k соответствует толщина d_k клина, а темной полосе номера $(k + m)$ - толщина d_{k+m} клина, m полос укладывается на расстоянии l . Из геометрических соображений (рис.3, заштрихованный треугольник) следует

$$\sin \alpha = (d_{k+m} - d_k) / l. \quad (3)$$

Найдём из (2) d_k и d_{k+m} и подставим в формулу (3), причем из-за малости угла α :

$$\sin \alpha \approx \alpha. \alpha = [(k+m) \cdot \lambda / 2 (2 \cdot n)] l = m \cdot \lambda / (2 \cdot n \cdot l), \quad \alpha = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Выразим α в градусах. Для этого нужно воспользоваться соотношением между радианом и секундой: $1 \text{ рад} = 206265'' \approx 2,06 \cdot 10^5''$. Окончательный ответ:

$$\alpha = 41,2''.$$

Задача 4. На прямоугольную бесконечную щель шириной a падает (перпендикулярно плоскости щели) плоская монохроматическая волна с длиной волны λ (рис.4). Найти распределение интенсивности J в дифракционной картине на экране. Решить ту же задачу для системы N параллельных щелей, разделенных непрозрачными промежутками шириной b (дифракционная решётка).

Решение

Применение метода зон Френеля позволяет найти условие минимума дифракционной картины от одной щели:

$$a \cdot \sin \varphi = \kappa \cdot \lambda \quad (1)$$

и условие максимума:

$$a \cdot \sin \varphi = (2\kappa + 1) \cdot \lambda / 2 \quad (2)$$

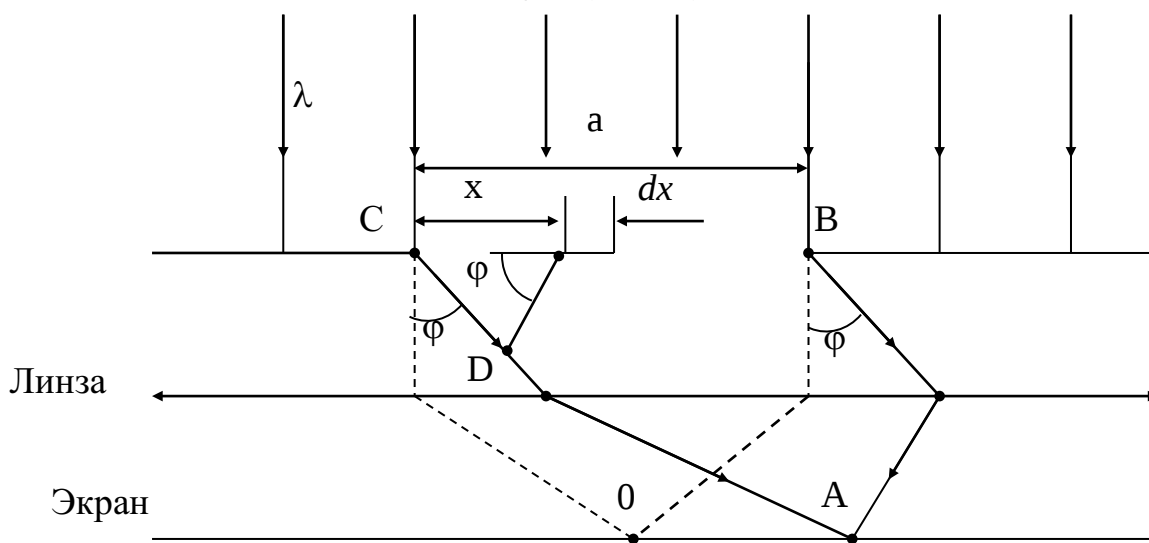


Рис. 4.4

Проанализируем распределение интенсивности J света в дифракционной картине. Применим метод дифференцирования и интегрирования.

Зона шириной dx (рис.4.4), находящаяся на расстоянии x от края щели C , посылает в направлении, определяемом углом φ , волну, уравнение которой имеет вид

$$dE = dE_x \cdot \cos(\omega t - 2\pi \cdot x \sin \varphi / \lambda), \quad (3)$$

где

$$dE_x = c/a ; c = \text{const}. \quad (4)$$

Учитываем, что для волны, распространяющейся в направлении CD , расстояния отсчитываются на этой прямой. Значит, $|CD| = x \cdot \sin \varphi$ и фаза волны, излучаемой зоной dx , равна $\omega t - (2\pi/\lambda) \cdot x \cdot \sin \varphi$. Уравнение (4) проинтегрируем по всей щели для точки O и получим значение произвольной постоянной:

$$E_0 = \int_0^a (c/a) \cdot dx = C.$$

Подставим значение dEx из (4) в формулу (3) и получим

$$DE = (E_0 / a) \cdot \cos(\omega t - 2\pi \cdot x \sin \varphi / \lambda) dx \quad (5)$$

Интегрируя уравнение (5) по всей щели, находим

$$\begin{aligned} E &= \int_0^a \frac{E_0}{a} \cos \frac{\omega t - 2\pi x \cdot \sin \varphi}{\lambda} dx = \\ &= \left[E_0 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \varphi \right] \right] / \frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \varphi \cdot \cos(\omega t - \pi \cdot a \cdot \sin \varphi / \lambda). \end{aligned}$$

Следовательно, амплитуда колебаний в точке A

$$E_A = E_0 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \varphi \right] / \frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \varphi \quad (6)$$

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды. Поэтому из уравнения (6) получаем закон распределения интенсивности света на экране для дифракции на одной щели:

$$J_{\varphi,1} = J_0 \cdot \sin^2 \left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \varphi \right] / \left[\frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin \varphi \right]^2. \quad (7)$$

Легко видеть, что из уравнений (6) и (7) получается условие минимума (1).

Дифракционная решетка состоит из N параллельных щелей шириной a , разделённых непрозрачными промежутками шириной b . Величину $(a+b)$ называют периодом дифракционной решетки.

Для количественного расчёта дифракционной картины, получаемой с помощью дифракционной решетки, воспользуемся методом зон Френеля. Разделим фронт плоской монохроматической волны λ , падающей нормально на дифракционную решётку, в каждой щели на зоны Френеля параллельными плоскостями так же, как и в случае дифракции на одной щели. Расстояние между соседними плоскостями равно $\lambda/2$. Если в каждой щели укладывается чётное число зон, то в данном направлении образуется минимум. Если в каждой щели укладывается нечётное число зон, то в каждой щели остается одна (нечетная, последняя) непогашенная зона. Пусть эти зоны располагаются у левых краев щелей. Разность хода между соседними источниками (непогашенными зонами) постоянна:

$$\delta = |BE| = |CF| = \dots = (a + b) \sin \varphi. \quad (8)$$

Данной разности хода δ соответствует постоянная разность фаз:

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \delta / \lambda = 2\pi(a + b) \cdot \sin \varphi / \lambda. \quad (9)$$

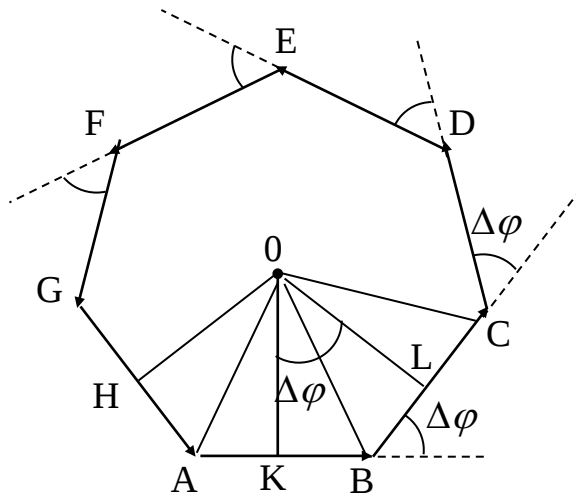


Рис. 4.5

Следовательно, задача о расчете дифракционной картины дифракционной решётки свелась к задаче о расчете интерференционной картины от многих когерентных источников с постоянной разностью фаз, определяемой формулой (9). Последнюю задачу решим методом векторных диаграмм. Рассмотрим для простоты случай равных амплитуд. Векторная диаграмма, соответствующая сложению $N = 7$ колебаний с одинаковыми амплитудами, изображена на

рис. 4.5. Разность фаз двух соседних источников отличается на одно и то же значение $\Delta\varphi = \text{const}$. Амплитуды $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FG| = E_{01}$. Амплитуду результирующего колебания изображают отрезком $AG = E_0$. Определяем её. Очевидно, что точки A, B, C, D, E, F и G располагаются на окружности, радиусом $R = OA = OB = \dots$ Опустим из центра окружности O на отрезки AB и BC перпендикуляры OK и OL .

Тогда $KOL = \Delta\varphi$, а $KOB = \Delta\varphi/2$. Из $\triangle KOB$ определяем радиус:

$$R = |KB|/\sin(\Delta\varphi/2) = E_{01}/2\sin(\Delta\varphi/2). \quad (10)$$

Так как $|AH| = |HG|$ (по построению $OH \perp AG$), то результирующая амплитуда

$$E_0 = |AG| = 2|AH|. \quad (11)$$

Угол $\angle AOH$ равен:

$$1/2 \cdot (2\pi - N \cdot \Delta\varphi) = \pi - \frac{N \cdot \Delta\varphi}{2}$$

и из $\triangle AOH$ находим

$$|AH| = R \cdot \sin(\pi - N \Delta\varphi/2) = R \cdot \sin(N \cdot \Delta\varphi/2).$$

Подставляя значение $|AH|$ в уравнение (11) и используя (10), получим

$$E_0 = E_{01} \cdot \sin(N \cdot \Delta\varphi/2)/\sin(\Delta\varphi/2).$$

Энергия колебаний (а также и интенсивность J) пропорциональна квадрату амплитуды. Следовательно, интенсивность результирующего колебания

$$J = J_{01} \cdot \sin^2(N \cdot \Delta\varphi/2)/\sin^2(\Delta\varphi/2), \quad (12)$$

где J_{01} - интенсивность одного источника. Учитывая формулы (12) и (9), получаем закон распределения интенсивности света в дифракционном спектре дифракционной решетки:

$$J_{\varphi,N} = J_{\varphi,1} \cdot \sin^2 \left[\frac{N \cdot \pi(a + \varepsilon) \cdot \sin \varphi}{\lambda} \right] / \sin^2 \left[\frac{\pi(a + \varepsilon) \cdot \sin \varphi}{\lambda} \right], \quad (13)$$

где $J_{\varphi,1}$ - интенсивность, создаваемая одной щелью (см. формулу (7)).

Задача 5. На щель шириной $a = 10^{-2}$ мм падает нормально к плоскости щели плоская монохроматическая волна с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м. Определить угловое положение первого максимума дифракционной картины. Среда - вакуум.

Решение

Угловое положение первого максимума можно определить из условия максимума:

$$a \cdot \sin \varphi = (2k + 1) \cdot \lambda / 2, \quad \varphi = \arcsin(3\lambda / 2a), \quad \varphi \approx 4^\circ 18'. \quad (14)$$

Более точное угловое положение максимумов находят с помощью формулы (7). Найдём экстремум функции $J_{\varphi,1}$, взяв первую производную этой функции по φ и приравняв её к нулю:

$$dJ_{\varphi,1}/d\varphi = J_0 \left[2 \sin(\pi \cdot a \cdot \sin \varphi / \lambda) \cdot \cos(\pi \cdot a \cdot \sin \varphi / \lambda) \cdot (\pi / \lambda) \cdot a \cdot \cos \varphi_0 (\pi \cdot a \cdot \sin \varphi / \lambda)^2 - \right. \\ \left. - 2(\pi \cdot a \cdot \sin \varphi / \lambda) \cdot (\pi \cdot a \cdot \sin \varphi / \lambda) \cdot \sin^2(\pi \cdot a \cdot \sin \varphi / \lambda) \right] / (\pi \cdot a \cdot \sin \varphi / \lambda)^4 = 0$$

Отсюда получим трансцендентное уравнение для определения экстремальных значений:

$$\varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi a \sin \varphi}{\lambda} = \pi a \sin \varphi / \lambda,$$

которое после введения обозначения

$$(a / \lambda) \cdot \sin \varphi = m, \quad (15)$$

принимает вид

$$\operatorname{tg} \pi \cdot m = \pi \cdot m. \quad (16)$$

Корнями трансцендентного уравнения (16) являются следующие числа:

$$m_1 = 1,43; \quad m_2 = 2,46; \quad m_3 = 3,47... \quad (17)$$

Учитывая (17), из формулы (15) определяем угловое положение первого дифракционного максимума:

$$\varphi = \arcsin \left(\frac{1,43 \cdot \lambda}{a} \right), \quad \varphi \approx 4^\circ 6'. \quad (18)$$

Из формул (18) и (14) видно, что более точное решение (18) значительно отличается от приближенного (14). Оценим ошибку приближенного решения:

$$\varepsilon = (\Delta \varphi / \langle \varphi \rangle) \cdot 100\%, \quad \varepsilon \approx 5\%.$$

Задача 6. Интенсивность центрального максимума при дифракции на одной щели равна J_0 . Определить отношение интенсивностей последующих трех максимумов к интенсивности центрального максимума J_0 .

Решение

Из условия максимума (15) для дифракции на одной щели

$$(a/\lambda)\sin\varphi = m,$$

где $m = 1,43; 2,46; 3,47 \dots$ (см.(17)), из формулы (7) находим искомые соотношения:

$$\begin{aligned} (J_{\varphi,1}/J_0)' &= [\sin(\pi \cdot m_1)/\pi \cdot m_1]^2; & (J_{\varphi,1}/J_0)'' &= [\sin(\pi \cdot m_2)/\pi \cdot m_2]^2; \\ (J_{\varphi,1}/J_0)''' &= [\sin(\pi \cdot m_3)/\pi \cdot m_3]^2. \end{aligned}$$

После подстановки числовых значений получим

$$(J_{\varphi,1}/J_0)' \approx 0,047; \quad (J_{\varphi,1}/J_0)'' \approx 0,017; \quad (J_{\varphi,1}/J_0)''' \approx 0,008.$$

Задача 7. Определить максимальный порядок дифракционного спектра, полученного от дифракционной решетки с периодом $(a+b) = 0,005$ мм при нормальном падении на нее плоской монохроматической волны с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м (в вакууме).

Решение

Максимальный порядок дифракционного спектра определяется из условия максимума:

$$(a+b) \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda.$$

Значение $\sin\varphi$ не может по модулю превышать единицы, следовательно, $a+b = k_{\max} \cdot \lambda$. Отсюда $k_{\max} = (a+b)/\lambda$, $k_{\max} \approx 8$. Однако такое решение является неточным. Оно получено в предположении, что в формуле (13) интенсивность освещенности $J_{\varphi,1}$, создаваемая одной щелью, постоянна и не зависит от угла φ . Из уравнения (7) видно, что $J_{\varphi,1}$ зависит от угла φ и может при определенных углах φ принимать значение, равное нулю. Найденное решение определяет лишь максимально возможный порядок спектра. Но не все главные максимумы $(a+b) \cdot \sin = k \cdot \lambda$ имеют место: те из них, положение которых совпадает с минимумом дифракционной картины от одной щели ($a \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda$), исчезают. Осуществляются только те главные максимумы, которые попадают в центральный максимум дифракционной картины от одной щели. Следовательно, максимальный порядок осуществляемых главных максимумов определяется из соотношений:

$$a \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda \text{ и } (a+b) \cdot \sin = k \cdot \lambda.$$

Из уравнения $a \cdot \sin\varphi = k \cdot \lambda$ при $k = 1$ определяем угловую полуширину центрального максимума дифракционной картины от одной щели:

$$a \cdot \sin\varphi_{\min} = \lambda \tag{19}$$

Из уравнения $(a+b) \cdot \sin = \kappa \cdot \lambda$ находим максимальный порядок реализуемых главных максимумов:

$$(a+b) \cdot \sin_{\min} = \kappa_{\max} \cdot \lambda.$$

Учитывая (19), получаем

$$\kappa_{\max} = (a+b)/a.$$

Для окончательного решения задачи необходимо задать ширину щели a . При $a_1 = 10^{-3}$ мм и $a_2 = b = 2,5 \cdot 10^{-3}$ мм с помощью последнего соотношения получаем

$$\kappa'_{\max} = 5; \quad \kappa''_{\max} = 2.$$

В последнем решении пренебрегаем реализуемыми главными максимумами, попадающими в области максимумов, следующих за центральным максимумом дифракционной картины от одной щели. Можно показать, что интенсивность этих последующих максимумов мала.

Задачи, рекомендуемые для аудиторных занятий

Задача 1. В установке для получения колец Ньютона пространство между линзой (показатель преломления $n_1 = 1,55$) и плоской прозрачной пластиной (показатель преломления $n_3 = 1,50$) заполнено жидкостью с показателем преломления $n_2 = 1,60$. Установка облучается монохроматическим светом ($\lambda = 6,10^{-7}$ м), падающим нормально на плоскую поверхность линзы. Найти радиус кривизны линзы R , если радиус четвертого ($\kappa = 4$) светлого кольца в проходящем свете $r_{\kappa} = 1$ мм.

$$\text{Ответ: } R = (r_{\kappa}^2 \cdot n_2) / \kappa \cdot \lambda; \quad R \approx 65 \text{ см.}$$

Задача 2. На маленькую пленку с показателем преломления $n = 1,33$ падает по нормали монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм. Отраженный свет в результате интерференции имеет наибольшую яркость. Какова наименьшая возможная толщина пленки?

$$\text{Ответ: } 0,113 \text{ мкм.}$$

Задача 3. На пластинку со щелью, ширина которой $a = 0,05$ мм, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,7$ мкм. Определить угол φ отклонения лучей, соответствующих первому дифракционному максимуму.

$$\text{Ответ: } 1^{\circ}12'.$$

Задача 4. Дифракционная решетка, освещенная нормально падающим монохроматическим светом, отклоняет спектр третьего порядка на угол $\varphi = 30^{\circ}$. На какой угол отклоняет она спектр четвертого порядка?

$$\text{Ответ: } 41^{\circ}50'.$$

Задача 5. Прозрачная дифракционная решетка имеет период 1,5 мкм. Найти угловую дисперсию, соответствующую максимуму наибольшего порядка спектральной линии с $\lambda = 0,53$ мкм, если свет падает на решетку: а) нормально; б) под углом $\alpha = 45^\circ$ к нормали.

Ответ: а) $D = (k/(a + e)) \cdot \sqrt{1 - (k \cdot \lambda / (a + e))^2} = 0,65 \text{ угл.мин/} \overset{0}{A}$,

где $k = 2$;

б) $D = (k/(a + e)) \cdot \sqrt{1 - (k \cdot \lambda / (a + e) - \sin \alpha)^2} = 1,3 \text{ угл.мин/} \overset{0}{A}$,
 $k=4$.

Задача 6. Монохроматический свет с $\lambda = 5890 \overset{0}{A}$, падает нормально на дифракционную решетку с периодом $(a + e) = 2,5$ мкм, содержащую $N = 10000$ штрихов. Определить угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

Ответ: $\Delta\varphi = 2\lambda / N \cdot \sqrt{(a + e)^2 - (k \cdot \lambda)^2} = 11''$.

Задачи для самостоятельного решения

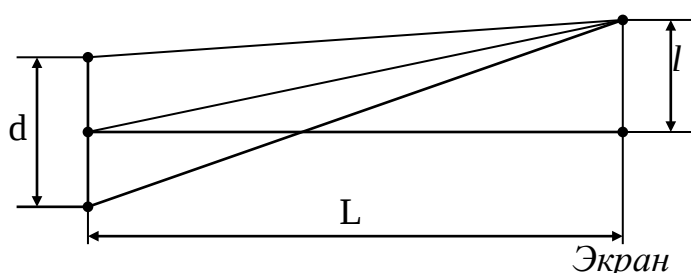


Рис. 4.6

1. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы $l = 0,05$ см. Данные установки (рис. 4.6): $L = 5$ м; $d = 0,5$ см.

2. На пути одного луча в интерференционной установке Юнга стоит трубка длиной $l = 2$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями и наблюдается интерференционная картина, когда эта трубка наполнена воздухом. Затем трубка наполняется хлором и при этом наблюдается смещение интерференционной картины на $N = 20$ полос. Вся установка помещена в термостат, поддерживающий постоянную температуру. Наблюдения производятся со светом линии D натрия ($\lambda = 5890 \overset{0}{A}$). Принимая показатель преломления воздуха $n = 1,000\,276$, вычислить показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

3. Определить вид поверхности равной интенсивности в опыте с зеркалами Френеля, если источник света 1) точка, 2) щель, параллельная линии пересечения зеркал.

Примечание. Предполагается, что отдельные участки щели когерентны между собой и колеблются в одной фазе. Это можно осуществить, например, освещая щель плоской волной.

4. Выразить расстояние l от центра интерференционной картины до m -й светлой полосы в опыте с бипризмой (рис. 4.7). Показатель преломления линзы n , длина волны λ , преломляющий угол α . Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

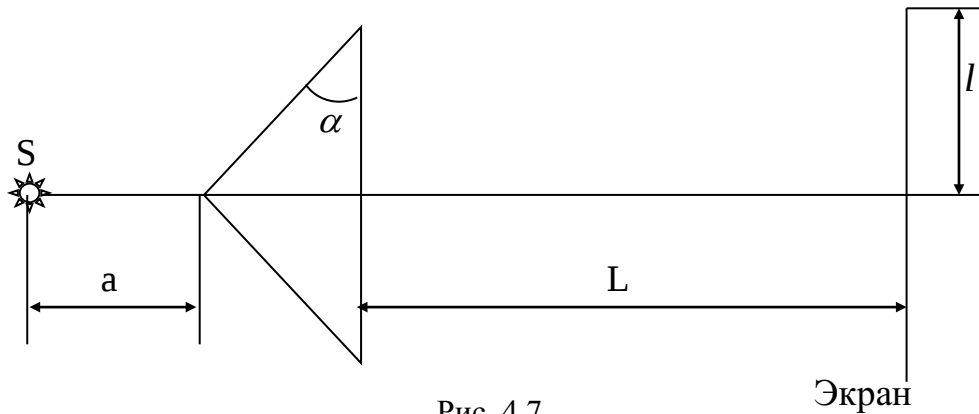


Рис. 4.7

5. От двух когерентных источников света S_1 и S_2 (рис. 4.8) получена система интерференционных полос на экране AB , удаленном от источников на расстояние $L = 2$ м. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 25$ см. Рассмотреть два случая: 1) расстояние линзы от источников равно $2F = 50$ см; 2) источники S_1 и S_2 находятся в фокальной плоскости линзы.

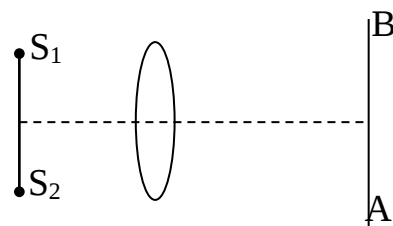


Рис. 4.8

6. На экран с двумя узкими параллельными щелями падают лучи непосредственно от Солнца. При каком расстоянии между щелями могут наблюдаться интерференционные полосы за экраном? Угловой диаметр Солнца $\alpha \approx 0,01$ рад. Примечание. Для упрощения расчёта диск Солнца заменить квадратом постоянной поверхностной яркости.

7. Изображение Солнца получено при помощи линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ мм на отверстии экрана (размер отверстия равен величине изображения). За экраном помещены две узкие параллельные щели на расстоянии 1 мм друг от друга. При каком расстоянии между экраном и щелями могут наблюдаться интерференционные полосы? (См. примечание в задаче 6).

0

8. Свет с длиной волны $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ падает на тонкую мыльную плёнку под углом падения $\alpha = 30^\circ$. В отраженном свете на плёнке наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними полосами равно $\Delta l = 4$ мм. Показатель преломления мыльной пленки $n = 1,33$. Вычислить угол φ между поверхностями плёнки.

9. В очень тонкой клиновидной пластинке в отраженном свете при нормальном падении наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними темными полосами $\Delta l = 5$ мм. Зная, что длина световой волны равна $\lambda = 5800$ Å, найти угол φ между гранями пластинки ($n = 1,5$).

10. Линза из крона ($n_k = 1,50$) лежит на пластинке, одна половина которой сделана из того же крона, а другая из флинта ($n_f = 1,70$). Прослойка между линзой и пластинкой заполнена сероуглеродом ($n = 1,63$). Описать характер колец Ньютона в отраженном и проходящем свете.

11. При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете ($\lambda_c = 4500$ Å) с помощью плосковыпуклой линзы, положенной на плоскую пластинку, радиус третьего светлого кольца оказался равным 1,06 мм. После замены синего светофильтра на красный был измерен радиус пятого светлого кольца, оказавшийся равным 1,77 мм. Найти радиус кривизны R линзы и длину волны $\lambda_{кр}$ красного света.

12. Кольца Ньютона получаются между двумя плосковыпуклыми линзами, прижатыми друг к другу своими выпуклыми поверхностями. Найти радиус r_m m -го темного кольца, если длина световой волны равна λ , а радиусы кривизны выпуклых поверхностей линз R_1 и R_2 . Наблюдение ведется в отраженном свете.

13. Расстояние между штрихами дифракционной решетки 4 мкм. На решетку падает нормально свет с длиной волны $\lambda = 0,58$ мкм. Максимум какого наибольшего порядка дает эта решетка?

14. Перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом $r = 1$ мм поместили точечный источник света ($\lambda = 0,5$ мкм). Найти расстояние z от диафрагмы до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии $n = 4$. Расстояние от источника света до диафрагмы $a = 1$ м. Радиус четвертой зоны Френеля для плоского волнового фронта $r_4 = 3$ мм. Определить радиус 12-й зоны из той же точки наблюдения.

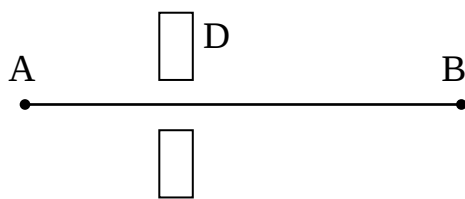


Рис. 4.9

15. В точке A (рис. 4.9) находится точечный источник монохроматического света $\lambda = 500$ нм. Диафрагма с отверстием радиусом 1 мм перемещается из точки, отстоящей от A на 50 см, в точку, отстоящую от A на 1,5 м. Сколько раз будет наблюдаться затемнение в точке B, если $AB = 2$ м?

16. На щель шириной $a = 0,1$ мм падает нормально пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм). Дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся в фокальной плоскости линзы, оптическая сила которой $D = 5$ дптр. Найти расстояние между минимумами во 2-м порядке.

17. На каком расстоянии друг от друга будут находиться на экране две линии спектра ртути с длинами волн 577 и 579 нм в спектре 1-го порядка, полученном при помощи дифракционной решётки с периодом 4 мкм? Фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран, 60 см. Лучи падают на решётку нормально.

18. Спектры 2-го и 3-го порядков в видимой области от дифракционной решетки частично перекрываются. Какой длине волны в спектре 3-го порядка соответствует $\lambda = 700$ нм в спектре 2-го порядка? Определить угловую дисперсию дифракционной решетки с периодом 2 мкм для спектра 2-го порядка, если $\lambda = 500$ нм.

19. На вершине телевизионной башни находятся на расстоянии 20 см две красные лампы ($\lambda = 640$ нм). Каким должен быть наименьший диаметр объектива зрительной трубы, чтобы эти лампы можно было увидеть раздельно с расстояния 15 км?

20. Пучок света ($\lambda = 600$ нм) от находящегося на Земле лазера фокусируют с помощью телескопа, диаметр объектива которого 2 м, на лунный кратер. Каков будет размер светового пятна на Луне, если расстояние от Луны до Земли 384400 км? Влиянием атмосферы пренебречь.

21. На дифракционную решетку с периодом 2 мкм падает нормально свет, пропущенный сквозь светофильтр. Фильтр пропускает волны длиной от 500 до 600 нм. Будут ли спектры различных порядков накладываться друг на друга?

22. Каково должно быть минимальное расстояние между двумя точками на поверхности Марса, чтобы их можно было различить в телескоп с диаметром объектива 60 см ($\lambda = 500$ нм)? Марс находится в великом противостоянии, т.е. расстояние до Земли 56 Гм.

23. При освещении кристалла хлорида калия KCl монохроматическими рентгеновскими лучами с длиной волны 145 пкм при угле между пучком рентгеновских лучей и поверхностью кристалла $14^\circ 20'$ появляется при зеркальном отражении максимум 1 порядка. Найти расстояние между соседними атомными плоскостями кристалла.

24. Какова постоянная кристаллической решетки у хлорида натрия $NaCl$, если монохроматическое рентгеновское излучение с длиной волны 71,2 мкм зеркально отражается от его естественной грани плоскости спайности? Максимум первого порядка наблюдается при угле $7^\circ 18'$.

25. Какова линейная дисперсия дифракционной решетки для длины волны 0,588 мкм в спектре 2-го порядка, если постоянная решетки 4 мкм, а фокусное расстояние проецирующей линзы 50 см.

4.2. Взаимодействие света с веществом. Поляризация света. Формулы Френеля. Дисперсия, поглощение и рассеяние света Основные формулы и соотношения

1. При отражении естественного света от диэлектрика имеют место формулы Френеля:

$$J_1 = 0,5 \cdot J_0 [\sin(\alpha - \gamma) / \sin(\alpha + \gamma)]^2;$$

$$J_2 = 0,5 \cdot J_0 [tg(\alpha - \gamma) / tg(\alpha + \gamma)]^2,$$

где J_0 - интенсивность падающего естественного света; J_1 - интенсивность отражённого света, у которого колебания вектора напряженности $\vec{E}$ световой волны перпендикулярны плоскости падения; J_2 - интенсивность отраженного света, у которого колебания вектора напряженности $\vec{E}$ световой волны параллельны плоскости падения; α - угол падения; γ - угол преломления.

2. Коэффициент отражения данной поверхности

$$F = (n - n_0)^2 / (n + n_0)^2,$$

где n_0 - показатель преломления среды, в которой распространяется свет; n - показатель преломления среды, от поверхности которой происходит отражение.

3. При отражении света от диэлектрика полная поляризация отраженного луча наступает при условии

$$tg \alpha_B = n \quad (\text{закон Брюстера}),$$

где α_B - угол падения лучей; n - относительный показатель преломления.

4. Интенсивность света, прошедшего через анализатор,

$$J = J_0 \cdot \cos^2 \varphi \quad (\text{закон Малюса}),$$

где J_0 - интенсивность света, прошедшего через поляризатор; φ - угол между плоскостями поляризатора и анализатора.

5. Угол поворота плоскости поляризации

$$\varphi = [\alpha] \cdot l,$$

где $[\alpha]$ - постоянная вращения, зависящая от природы вещества и длины световой волны λ : $[\alpha] \approx 1 / \lambda^2$; l - расстояние, пройденное световым лучом в веществе. Для растворов

$$\varphi = [\alpha] \cdot l \cdot c,$$

где c - концентрация вещества в растворе; l - длина трубки, в которую налит раствор.

6. Степень поляризации света

$$P = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}},$$

где $J_{\max}$ и $J_{\min}$ - максимальная и минимальная интенсивности света, которые соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям световых колебаний в пучке.

7. Интенсивность света, вышедшего из слоя вещества толщиной l после поглощения (закон Бугера),

$$J = J_0 \cdot \exp(-\kappa \cdot l),$$

где J_0 - интенсивность света, падающего на поглощающий слой, κ – коэффициент поглощения. Для поглощения света в растворах выполняется закон Бугера-Ламберта:

$$J = J_0 \cdot \exp(-\kappa_1 \cdot c \cdot l),$$

где κ_1 – коэффициент поглощения на единицу концентрации вещества; c – концентрация растворенного вещества.

8. Оптическая плотность раствора

$$D = \lg(1/\tau) = \lg(J_0/J),$$

где τ - коэффициент пропускания.

9. Уменьшение интенсивности света вследствие рассеяния

$$J_1 = J_0 \cdot \exp(-\kappa' \cdot l),$$

где κ' – коэффициент рассеяния. Совместное действие поглощения и рассеяния приводит к изменению интенсивности по закону

$$J_1 = J_0 \cdot \exp(-\mu \cdot l),$$

где $\mu = \kappa + \kappa'$.

10. Интенсивность света, рассеянного веществом, зависит от длины волны (закон Рэлея):

$$J = \mu / \lambda^4,$$

где μ - постоянная рассеяния; λ - длина волны падающего света.

11. В излучении Вавилова-Черенкова угол между направлениями распространения излучения и вектором скорости частицы

$$\cos \theta = c/(n \cdot v),$$

где v - скорость заряженной частицы; n - показатель преломления среды; c - скорость света в вакууме.

Примеры решения задач

Задача 1. Естественный луч света падает на полированную поверхность стеклянной пластины. Отражённый от пластины луч образует угол $\varphi = 97^\circ$ с падающим лучом (рис.4.10). Определить показатель преломления n_1 жидкости, если отражённый свет максимально поляризован.

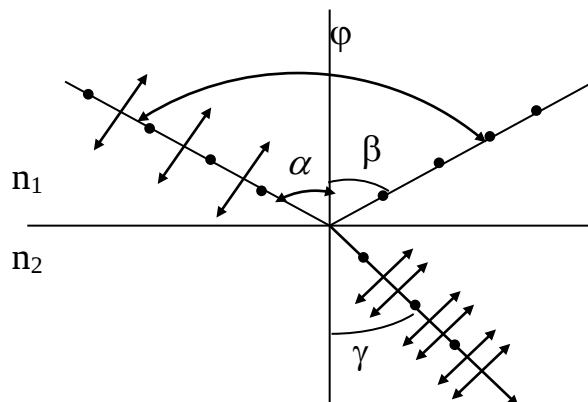


Рис. 4.10

Решение

Согласно закону Брюстера, луч света, отражённый от диэлектрика, максимально поляризован, если $\operatorname{tg} \alpha = n_2 / n_1$. Так как $\alpha = \varphi / 2$, то

$$\operatorname{tg} \varphi / 2 = n_2 / n_1,$$

откуда

$$n_2 = n_1 \operatorname{tg}(\varphi / 2) = 1,5.$$

Ответ: $n_2 = 1,5$.

Задача 2. На пути частично поляризованного света помещен николь. При его повороте на угол $\alpha = 60^\circ$ из положения, соответствующего максимальному пропусканию света, интенсивность прошедшего света уменьшилась в три раза. Найти степень поляризации падающего света.

Решение

Степень поляризации падающего света

$$P = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{J_{\max} + J_{\min}}, \quad (1)$$

где $J_{\max}$ и $J_{\min}$ - максимальная и минимальная интенсивности света, которые соответствуют двум взаимно перпендикулярным направлениям световых колебаний в пучке. Призма Николя (николь) пропускает только такой свет, в котором вектор $\vec{E}$ совершает колебания в строго определенном главном направлении этого поляризатора. Пусть свет распространяется в направлении оси OZ (рис.4.11). Интенсивность импульсов, в которых вектор $\vec{E}$ колеблется вдоль оси OX , обозначим J_x , а вдоль оси OY – J_y . Причем $J_y < J_x$. В начальном положении I главное сечение Николя AA_1 параллельно оси OX . Николь пропускает максимум света и интенсивность прошедшего света

$$J_1 = J_x. \quad (2)$$

Импульсы с интенсивностью J_x обладают некоторым амплитудным значением вектора напряженности $\vec{E}_{01}$. В импульсах с интенсивностью J_y амплитуда вектора напряженности $\vec{E}_{02}$. При повороте николя в положение Π (на угол $\alpha = 60^\circ$) новым главным направлением николя будет положение $A'A'_1$. При этом через николь пройдут составляющие амплитуды $\vec{E}'_{01}$ и E'_{02} :

$$E'_{01} = E_{01} \cos \alpha \quad \text{и} \quad E'_{02} = E_{02} \cos \alpha. \quad (3)$$

Эти импульсы некогерентны, т.к. в падающем пучке импульсы, в которых векторы $\vec{E}$ колеблются во взаимно перпендикулярных направлениях, обусловлены разными актами испускания. После прохождения николя некогерентность импульсов сохраняется и суммарная интенсивность света, прошедшего через николь,

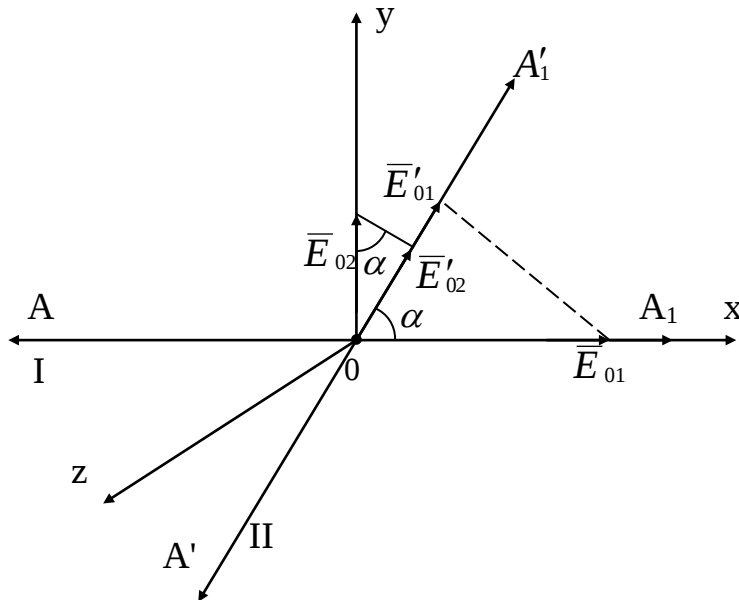


Рис. 4.11

$$J_2 = J'_x + J'_y, \quad (4)$$

где J'_x и J'_y пропорциональны соответственно $(E'_{01})^2$ и $(E'_{02})^2$. Решая совместно (3) и (4), получим

$$J_2 = (E'_{01})^2 + (E'_{02})^2 = E_{01}^2 \cdot \cos^2 \alpha + E_{02}^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

или

$$J_2 = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha.$$

Так как $J_2 = J_1/3$, то $J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha = J_1/3$. Учитывая (2), получим

$$J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha = J_x/3.$$

При $\alpha = 60^\circ$ $J_x = 9J_y$. Формулу (1) можно записать в виде

$$P = \frac{J_x - J_y}{J_x + J_y} = 0,8.$$

Задача 3. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между плоскостями поляризаторов составляет $\alpha = 60^\circ$. Определить, во сколько раз уменьшится интенсивность J_0 естественного света 1) при прохождении через один николь N_1 ; 2) при прохождении через оба николя. Коэффициент поглощения света в никеле $\kappa = 0,05$. Потери на отражение света не учитывать.

Решение

1. Естественный свет интенсивностью J_0 , падая на грань призмы Николя (рис.4.12), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два луча: обыкновенный O и необыкновенный H . Оба луча одинаковы по интенсивности (она равна $J_0/2$) и полностью поляризованы.

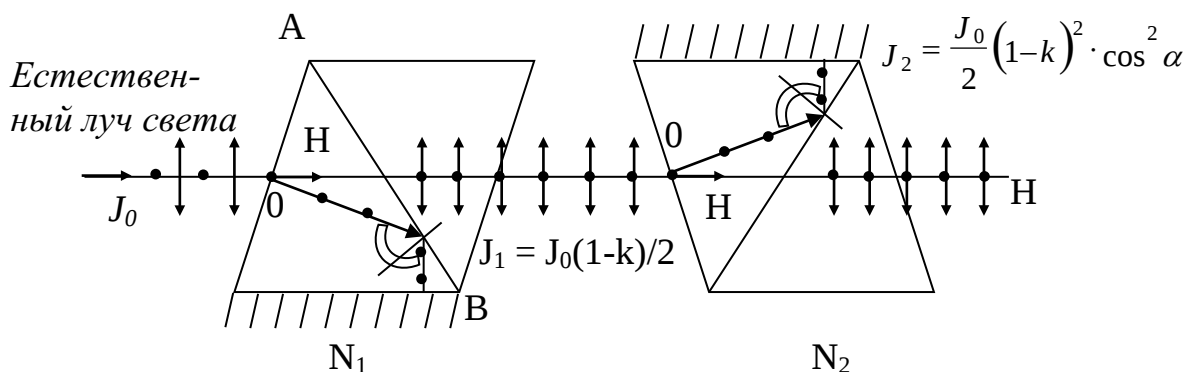


Рис. 4.12

Плоскость колебаний необыкновенного луча лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярна плоскости чертежа. Точка на луче означает, что вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно плоскости главного сечения. Черточками $\updownarrow$ показаны колебания вектора $\vec{E}$ в плоскости чертежа (плоскости главного сечения). Обыкновенный луч O вследствие полного внутреннего отражения от границы AB отбрасывается на зачернённую нижнюю поверхность призмы и поглощается ею. Через призму проходит необыкновенный луч H , интенсивность которого (вследствие поглощения) уменьшается. Часть интенсивности света, поглощенная призмой, равна $(\kappa \cdot J_0 / 2)$, где κ - коэффициент поглощения света в никеле. Поэтому интенсивность света, прошедшего через первый николь N , будет равна:

$$J_1 = J_0/2 - \kappa(J_0/2) \quad \text{или} \quad J_1 = J_0(1 - \kappa)/2.$$

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность J_0 естественного света, падающего на первый николь N_1 , на интенсивность J_1 поляризованного света, прошедшего через николь N_1 :

$$J_0/J_1 = J_0/J_0(1 - \kappa)/2 = 2/(1 - \kappa) \quad \text{или} \quad J_0/J_1 = 2,1.$$

Интенсивность уменьшается в 2,1 раза.

2. Плоскополяризованный луч света интенсивностью J_1 падает на второй николь N_2 и также разделяется на два луча различной интенсивности: обыкновенный O и необыкновенный H . Обыкновенный луч полностью поглощается никелем N_2 . Интенсивность необыкновенного луча J_2 , вышедшего из николя N_2 , определяется законом Малюса. Без учета поглощения света во втором никеле закон Малюса запишется в виде

$$J_2 = J_1 \cdot \cos^2 \alpha,$$

где α - угол между плоскостью колебаний в поляризованном луче и плоскостью колебаний, пропускаемых никелем без ослабления. Учитывая потери интенсивности на поглощение в никеле N_2 , получим

$$J_2 = J_1(1 - \kappa) \cdot \cos^2 \alpha.$$

Уменьшение интенсивности света при прохождении через оба николя

$$J_0/J_2 = J_0/J_1(1-\kappa) \cdot \cos^2 \alpha.$$

Учитывая, что

$$J_0/J_1 = 2/(1-\kappa),$$

окончательно получим

$$J_0/J_2 = 2/(1-\kappa)^2 \cdot \cos^2 \alpha,$$

$$J_0/J_2 = 8,86.$$

Задача 4. Вычислить групповую скорость 1) упругих поперечных волн в стержне, фазовая скорость которых $v = a / \lambda$ ($a = \text{const}$); 2) электромагнитных волн в разряженной плазме, фазовая скорость которых $v = c / \sqrt{1 + A/\omega^2}$, ($A = \text{const}$)

Решение

Если среда обладает дисперсией, т.е. фазовая скорость волн зависит от циклической частоты ω (или от длины волны λ), то независимо от природы волн групповая скорость отлична от фазовой и может быть рассчитана как

$$U = d\omega / dk, \quad (1)$$

где $k = 2\pi / \lambda$ - волновое число.

Если задан закон дисперсии, т.е. $v = v(\lambda)$ или $v = v(\omega)$, то выражение группой скорости можно найти, используя соотношение

$$\omega = 2\pi v / \lambda \text{ и } k = \omega / v. \quad (2)$$

1. В задаче закон дисперсии задан как $v = v(\lambda)$. Преобразуем правую часть выражения (1): $d\omega / dk = (d\omega / d\lambda) \cdot 1 / (dk / d\lambda)$. Используя выражения для волнового числа и первую из формул (2) и производя дифференцирование, получаем

$$U = v - \lambda \cdot (dv / d\lambda). \quad (3)$$

Подставим в формулу (3) заданный закон дисперсии

$$U = v - \lambda(d(a / \lambda) / d\lambda) = 2a / \lambda = 2v. \quad (4)$$

Под фазовой скоростью v в выражении (4) можно понимать среднюю фазовую скорость волн рассматриваемого интервала или ее минимальное значение. Полученный результат показывает, что в данном случае групповая скорость U , т.е. скорость распространения волнового возмущения (волнового пакета), больше фазовой скорости.

2. Закон дисперсии задан как $v = v(\omega)$. Преобразуем выражение (1):

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dv} \cdot \frac{dv}{dk} = \frac{1}{dv/d\omega} \cdot \frac{1}{dk/dv}. \quad (5)$$

Используя вторую из формул (2), произведем дифференцирование:

$$\frac{d\kappa}{d\nu} = \left[\nu \frac{d\omega}{d\nu} - \omega \right] / \nu^2,$$

полученное выражение $d\kappa / d\nu$ подставим в формулу (5):

$$U = \frac{\nu^2}{\nu - \omega(d\nu/d\omega)}. \quad (6)$$

По заданному закону дисперсии

$$d\nu/d\omega = d\left(c/\sqrt{1+A/\omega^2}\right)/d\omega = c \cdot A/\omega^3 \cdot (1+A \cdot \omega^2)^{\frac{3}{2}}. \quad (7)$$

В формулу (6) подставим выражение (7) и закон дисперсии и получим

$$U = c \cdot \sqrt{1+A/\omega^2} = c^2/\nu. \quad (8)$$

Групповая скорость равна скорости распространения энергии, переносимой данным волновым пакетом, и не может превышать скорости света c в вакууме. Таким образом, выражение (8) имеет смысл, если в формуле (7) коэффициент $A < 0$, т.е. фазовая скорость распространения волн $\nu > c$.

Задача 5. Показатели преломления сероуглерода для света с длинами волн $\lambda_1 = 5090 \text{ \AA}$, $\lambda_2 = 5340 \text{ \AA}$, $\lambda_3 = 5740 \text{ \AA}$ соответственно равны $n_1 = 1,647$, $n_2 = 1,640$, $n_3 = 1,630$. Найти фазовую скорость для λ_2 и групповую скорость вблизи нее.

Решение

Фазовые скорости для каждой заданной длины волны могут быть найдены как

$$\nu_i = c / n_i. \quad (1)$$

Для нахождения групповой скорости надо знать закон дисперсии. Общее выражение групповой скорости можно преобразовать к виду

$$U = d\omega/d\kappa = (d\omega/d\lambda) \cdot 1/(d\kappa/d\lambda).$$

Учитывая, что $\kappa = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi\nu/\lambda$, получаем

$$U = \nu - \lambda \cdot (d\nu/d\lambda). \quad (2)$$

По условию, групповая скорость должна быть выражена через показатель преломления n и длину волны λ . Используя выражение (1), преобразуем формулу (2):

$$U = c \cdot (1 + \lambda \cdot (dn/d\lambda)/n) / n \quad (3)$$

Производная $dn/d\lambda$ может быть найдена, если известна функция $n(\lambda)$, либо графически по тангенсу угла наклона касательной к графику $n(\lambda)$ в данной точке. Для построения графика недостаточно трех точек с заданными значениями n и λ . Поэтому задача может быть решена только приближенно. Если отношения

$$(n_2 - n_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \text{ и } (n_3 - n_2) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2) \quad (4)$$

равны или незначительно отличаются друг от друга, то функцию $n(\lambda)$ можно считать близкой к линейной в диапазоне от λ_1 до λ_3 . Тогда производная $dn/d\lambda$ для $\lambda = \lambda_2$ равна либо отношению (4), либо среднему из двух значений. При значительном расхождении соотношений (4) оценить групповую скорость по данным задачи невозможно. Согласно (1) фазовая скорость для $\lambda = \lambda_2$ равна $v_2 = 1,83 \cdot 10^8$ м/с.

Рассчитаем отношения (4):

$$(n_2 - n_1) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) = -2,80 \cdot 10^{-5} \text{ }^0 \text{ } \text{Å}^{-1},$$

$$(n_3 - n_2) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2) = -2,50 \cdot 10^{-5} \text{ }^0 \text{ } \text{Å}^{-1}.$$

Расхождение составляет около 11% и в качестве $dn/d\lambda$ при $\lambda = \lambda_2$ можно взять среднее $dn/d\lambda = -2,65 \cdot 10^{-5} \text{ }^0 \text{ } \text{Å}^{-1}$. Знак минус показывает, что с ростом λ показатель преломления уменьшается, а фазовая скорость увеличивается (область нормальной дисперсии). В формуле (3) заменяем $dn/d\lambda$, а также $n = n_2$ и $\lambda = \lambda_2$ и получаем

$$U = 1,7 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Рассчитанная групповая скорость равна скорости волнового пакета, содержащего длины волн в интервале от λ_2 до $\lambda_2 + \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda \ll \lambda_2$.

Задача 6. Электромагнитная волна с циклической частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме N_0 . Определить зависимость фазовой скорости электромагнитных волн в плазме от их частоты, если взаимодействием волны с ионами можно пренебречь.

Решение

Согласно теории Максвелла, фазовая скорость электромагнитной волны в среде

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}, \quad (1)$$

где $c = c/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ - скорость света в вакууме; ε и μ - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Если для разреженной плазмы считать $\mu \cong 1$, то задача сводится к нахождению зависимости $\varepsilon(\omega)$. Электрические свойства среды могут быть характеризованы вектором поляризации $\vec{p}$. Если вектор поляризации прямо пропорционален напряжённости $\vec{E}$ электрического поля, то коэффициент пропорциональности α определяет диэлектрическую проницаемость среды:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}. \quad (2)$$

Известно, что

$$\varepsilon = 1 + \alpha. \quad (3)$$

Значит, чтобы найти характер зависимости $\varepsilon(\omega)$, необходимо выяснить, что происходит в плазме при прохождении электромагнитных волн. Разряженная плазма представляет собой (в первом приближении) совокупность свободных электронов и положительных ионов. При отсутствии полей плазму можно считать электрически нейтральной. Концентрации положительных ионов и электронов одинаковы в любом достаточно малом, но в макроскопическом объёме. Если электроны совершают колебательное движение, то поле, ими создаваемое, аналогично полю колеблющихся диполей, и вектор поляризации можно найти как

$$\vec{P} = \vec{P}_0 \cdot N_{01}, \quad (4)$$

где $\vec{P}_0$ - некоторый средний изменяющийся со временем электрический момент диполя, соответствующий движению одного электрона; N_0 - концентрация электронов. Чтобы найти характер зависимости $\vec{P}_0(\omega)$, рассмотрим движение электрона под действием электрического поля падающей волны. Если пренебречь изменением фазы волны на расстояниях, малых по сравнению с длиной падающей волны, то напряженность электрического поля, воздействующего на электрон,

$$E = E_0 \cdot \cos \omega \cdot t.$$

Согласно второму закону Ньютона

$$m_e \cdot (dU_e/dt) = e \cdot E_0 \cdot \cos \omega \cdot t, \quad (5)$$

где m_e и e - масса и абсолютное значение заряда электрона. Знаки векторов в (5) опущены, т.к. сделано предположение, что падающая волна плоско поляризована и вектор $\vec{E}$ колеблется только в одном направлении, например, вдоль оси x . Такое же направление и сохранит вектор ускорения $\vec{a} = d\vec{U}_e/dt$. Умножим обе части уравнения (5) на dt/m_e и произведём интегрирование в пределах от $t = 0$ ($U_e = 0$) (т.е. от начала действия электромагнитной волны) до произвольного момента (скорость электрона примет некоторое значение U_e):

$$\int_0^{U_e} dU_e = (e \cdot E_0 / m_e) \cdot \int_0^t \cos \omega \cdot t \cdot dt.$$

В результате интегрирования получим выражение скорости электрона. Это выражение позволит найти закон движения электрона:

$$U_e = \frac{dx}{dt} = \frac{eE_0 \sin \omega \cdot t}{(m_e \cdot \omega)}.$$

Пусть в момент $t = 0$ координата электрона x_0 , тогда

$$\int_{x_0}^x dx = \frac{eE_0}{(m_e \omega)} \int_0^t \sin \omega \cdot t \cdot dt$$

или

$$x = x_0 + \frac{eE_0}{m_e \omega^2} - \frac{eE_0}{m_e \omega^2} \cdot \cos \omega \cdot t, \quad (6)$$

где $\frac{eE_0}{m_e\omega^2}$ - некоторое постоянное смещение электронов при прохождении электромагнитной волны. Очевидно, что появление такого смещения означает нарушение электрической нейтральности плазмы, но т.к. это смещение не зависит от времени, то оно не изменит фазовой скорости волны. Слагаемое x_0 следует отбросить, т.к. вследствие нейтральности плазмы (до воздействия электромагнитной волны) при усреднении по всем свободным электронам оно обратится в нуль. Таким образом, искомый дипольный момент $P_0 = e \cdot x(t)$ определяется только последним членом выражения (6):

$$P_0 = -\frac{e^2 E_0 \cos \omega \cdot t}{m_e \omega^2}.$$

Благодаря сделанному ранее предположению о том, что падающая волна плоско поляризована, последнее равенство можно записать в векторном виде:

$$\vec{P}_0 = -\frac{e^2 \vec{E}}{m_e \omega^2}.$$

Согласно (4), вектор поляризации

$$\vec{P} = -\frac{e^2 \cdot N_0 \cdot \vec{E}}{m_e \omega^2},$$

и на основании формул (2) и (3)

$$\varepsilon = \frac{1 - e^2 N_0}{\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot \omega^2}. \quad (7)$$

Подставляя выражение (7) в (1), найдём фазовую скорость как функцию циклической частоты, т.е. закон дисперсии

$$\nu = c / \sqrt{1 - e^2 N_0 / (\varepsilon_0 \cdot m_e \cdot \omega^2)}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что в данной среде фазовая скорость электромагнитных волн больше скорости света в вакууме. Полученное выражение фазовой скорости хорошо согласуется с опытом в большом диапазоне частот - от видимого света до радиоволн ($\omega > 10^8 \text{ с}^{-1}$). Следует помнить, что весь вывод основывается на приближенной модели, согласно которой разряженная плазма представляет собой совокупность положительных ионов и электронов, не взаимодействующих между собой. Предположение о плоско поляризованной волне не принципиально и введено только для упрощения расчёта. Пренебрежение взаимодействием волны с ионами также не существенно, т.к. дипольный момент, обусловленный колебаниями ионов, пренебрежимо мал вследствие очень большой массы ионов по сравнению с массой электронов.

Задачи, рекомендуемые для аудиторных занятий

Задача 1. А) На поверхность стекла падает пучок естественного света. Угол падения равен 45° . Найти с помощью формул Френеля степень поляризации 1) отраженного света; 2) преломленного света.

Ответ: 1) 0,83; 2) 0,044.

Б) Естественный свет падает под углом Брюстера на поверхность стекла. Определить с помощью формул Френеля 1) коэффициент отражения; 2) степень поляризации преломленных лучей.

$$\text{Ответ: 1) } \rho = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^2 / 2 = 0,074;$$

$$2) P = \frac{J_{II} - J_I}{J_{II} + J_I} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{(1 + n^2)^2 - 4n^2}{(1 + n^2)^2 + 4n^2} = 0,080,$$

где n - показатель преломления стекла.

Задача 2. Узкий пучок естественного света падает под углом Брюстера на стопу Столетова, состоящую из N толстых плоскопараллельных стеклянных пластинок с показателем преломления $n=1,5$. Найти: 1) степень поляризации P прошедшего пучка, 2) P при $N = 1, 2, 5$ и 10 .

Ответ: 1) $P = (1 - \alpha^{4N}) \cdot (1 + \alpha^{4N})$, где $\alpha = 2\pi / (1 + n^2)$;

2) $P = 0,16; 0,31; 0,67$ и $0,92$ соответственно.

Задача 3. Пучок естественного света падает на систему из $N = 6$ никелей, плоскость пропускания каждого из которых повернута на угол $\varphi = 30^\circ$ относительно плоскости пропускания предыдущего николя. Какая часть света проходит через эту систему?

Ответ: $\eta = (\cos \alpha)^{2(N-1)} / 2 = 0,12$.

Задача 4. При зондировании разряженной плазмы радиоволнами различных частот обнаружили, что радиоволны с $\lambda > \lambda_0 = 0,75$ м всегда испытывают полное внутреннее отражение. Найти концентрацию свободных электронов в этой плазме.

$$\text{Ответ: } n_0 = \frac{4\pi^2 \cdot c^2 \cdot m \cdot \epsilon_0}{\lambda^2 \cdot e^2} = 2,0 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Чему равен угол полной поляризации вещества, у которого предельный угол полного внутреннего отражения 42° ?

2. Естественный луч падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку. Угол падения равен углу полной поляризации. Какую часть ин-

тенсивности падающего естественного света составит при этом интенсивность отраженного луча? Показатель преломления стекла 1,52.

3. Луч естественного света отражается от плоского стеклянного дна сосуда, наполненного водой. Каков должен быть угол падения луча на воду, чтобы отражённый от дна сосуда луч был максимально поляризован? Показатель преломления стекла 1,52; воды - 1,33.

4. Луч света, падая на поверхность раствора, частично отражается, частично преломляется. Определить показатель преломления раствора, если отражённый луч полностью поляризуется при угле преломления 35° .

5. Анализатор в 2 раза ослабляет интенсивность падающего на него поляризованного света. Каков угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора. Потерями света на отражение пренебречь.

6. Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора 45° . Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до 60° ?

7. Определить толщину кварцевой пластинки, для которой угол поворота плоскости поляризации света длиной волны 490 нм равен 150° . Постоянная вращения в кварце для этой длины волны $26,3^\circ$ мм.

8. Естественный свет падает на стеклянную призму. Определить α - угол между гранями (рис. 4.13), если отражённый луч максимально поляризован.

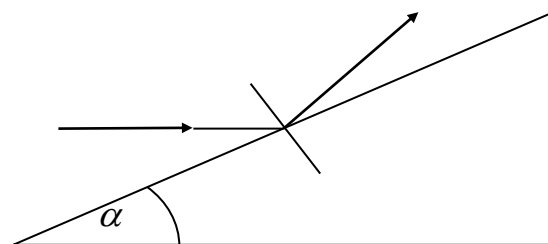


Рис. 4.13

9. Определить коэффициент отражения стекла, показатель преломления которого $n = 1,5$, при условии, что естественный свет падает на его поверхность под углом Брюстера.

10. На пути пучка естественного света поместили последовательно два одинаковых поляризационных приспособления. Оказалось, что при параллельных плоскостях поляризации эта система пропускает в 10 раз больше света, чем при скрещенных. Определить степень поляризации, которую создает каждое приспособление в отдельности и вся система при параллельных плоскостях поляризации.

11. Луч естественного света последовательно проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых 60° . Какая доля начального потока выйдет из анализатора?

12. Во сколько раз ослабевает естественный свет, проходя через два николя, главные плоскости которых составляют между собой угол 63° , если в каждом из николей теряется 10% падающего света?

13. Плоскопараллельная пластинка в $1/4$ волны вырезана из кварца и имеет толщину 16 мкм. На нее падает монохроматический свет с длиной волны 589 нм. Определить показатель преломления необыкновенного луча, если показатель преломления обыкновенного 1,544.

14. Раствор сахара, налитый в трубку длиной 16 см и помещённый между поляризаторами, поворачивает плоскость колебаний желтых лучей натриевого пламени на 30° . Какова масса сахара, находящегося в растворе объемом 1 м^3 , если удельное вращение сахара для желтых лучей натрия $66,7 \cdot 10^{-2} / (\text{м}^2 \cdot \text{кг})$?

15. Определить групповую скорость света в сероуглероде. Показатель преломления сероуглерода при длине волны $\lambda = 0,527 \text{ мкм}$ составляет $n = 1,64$, а $dn/d\lambda = -0,218 \text{ мкм}^{-1}$?

16. Показатель преломления воды при $\lambda_1 = 441 \text{ нм}$ равен $n_1 = 1,341$, а при $\lambda_2 = 589 \text{ нм}$ - $n_2 = 1,334$. Определить средние значения фазовой и групповой скоростей света в воде для синей области спектра (средней между λ_1 и λ_2).

17. Толщина стекла в теплице 2 мм. Коэффициент поглощения стекла для инфракрасной области спектра $0,62 \text{ см}^{-1}$. Какая доля энергии достигает растений?

18. В четырёхпроцентном растворе вещества в прозрачном растворителе интенсивность света на глубине $l_1 = 20 \text{ мм}$ ослабляется в 2 раза. Во сколько раз ослабляется интенсивность света на глубине $l_2 = 30 \text{ мм}$ в восьми процентном растворе того же вещества?

19. При прохождении света через слой раствора поглощается $1/3$ первоначальной световой энергии. Определить коэффициент пропускания.

20. Чему равна оптическая плотность раствора, если его коэффициент пропускания $\tau = 0,3$?

21. Прозрачная пластинка пропускает половину падающего на нее светового потока. Определить коэффициент поглощения, если толщина пластинки $l = 4,2 \text{ см}$. Рассеянием пренебречь. Считать, что 10% падающего потока отражается от поверхности пластинки.

22. Коэффициент поглощения воды для излучения с длиной волны $0,77 \text{ мкм}$ - $0,0024 \text{ мм}^{-1}$. На какой глубине монохроматический пучок лучей будет ослаблен в 2,7 раза? На сколько надо увеличить яркость падающего пучка, если нужно изменить толщину слоя воды от 1 до 5 см без уменьшения яркости излучения, выходящего из водяного фильтра?

23. При прохождении через пластинку свет длиной волны λ_1 ослабляется в результате поглощения в N_1 раз, а свет длиной волны λ_2 - в N_2 раз. Определить коэффициент поглощения для света с длиной волны λ_2 , если коэффициент поглощения для λ_1 равен k_1 .

24. Какова концентрация исследуемого раствора, если одинаковая освещенность фотометрических полей была получена у эталонного 3% раствора при толщине 8 мм, а у исследуемого - при толщине 24 мм?

25. Какой наименьшей скоростью должен обладать электрон, чтобы в веществе с показателем преломления $n = 1,60$ возникло излучение Вавилова-Черенкова?

Варианты индивидуального задания

№ варианта	Тема 1	Тема 2
1	1,24,5	12,14,25
2	2,23,6	11,15,24
3	3,22,7	10,16,23
4	4,21,8	9,17,22
5	5,20,9	8,18,21
6	6,19,11	7,19,25
7	7,18,10	6,20,15
8	8,17,5	5,21,16
9	9,16,4	4,22,14
10	10,15,3	3,23,13
11	11,14,2	2,24,12
12	12,13,1	1,25,11
13	15,1,25	13,6,10
14	16,2,24	14,7,20
15	17,3,23	15,8,11
16	18,4,22	16,9,12
17	19,5,21	17,10,21
18	20,6,24	18,11,3
19	21,7,12	19,12,4
20	22,8,13	20,13,5
21	23,9,14	21,14,6
22	24,10,15	22,15,7
23	25,11,16	23,16,8
24	13,12,17	24,17,9
25	14,1,18	25,18,10

ГЛАВА 5. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

Основные формулы и соотношения

1. Энергия фотона

$$\varepsilon = h \cdot \nu,$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка; ν - частота света.

2. Релятивистские масса и импульс фотона:

$$m_{\phi} = \varepsilon / C^2 \quad \text{и} \quad P_{\phi} = h \cdot \nu / C = h / \lambda = m_{\phi} \cdot C,$$

где $C = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме.

3. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$h \cdot \nu = A + m \cdot v_m^2 / 2,$$

где A – работа выхода электрона из металла. В предельном случае, когда выполняется условие

$$h \cdot \nu_0 = h \cdot C / \lambda_0 = A,$$

частота ν_0 (длина волны λ_0) определяет «красную границу» фотоэффекта. Из условия $|e \cdot U_3| = m \cdot v_m^2 / 2$ определяется задерживающая разность потенциалов U_3 . Величина $(e \cdot U_3)$ численно равна работе сил электрического поля, способного «задерживать» самые быстрые фотоэлектроны.

4. Давление света при нормальном падении

$$P = \frac{I}{C} \cdot (1 + \rho),$$

где ρ - коэффициент отражения света; I - поверхностная плотность потока.

5. Коротковолновая граница ν_0 сплошного рентгеновского спектра, обусловленного торможением электронов

$$h \cdot \nu_0 = e \cdot U,$$

где U - разность потенциалов, приложенная к электродам рентгеновской трубки; ν_0 - максимальная частота, при которой еще возможно тормозное рентгеновское излучение.

6. Комptonовское смещение (увеличение длины волны рассеянного излучения)

$$\Delta \lambda = 2 \cdot \frac{h}{m_0 C} \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

где $\lambda_0 = h / m_0 \cdot C$ - комptonовская длина волны частицы, m_0 - ее масса покоя, φ - угол рассеяния.

7. Закон Стефана - Больцмана:

$$R_{\odot}^* = \sigma \cdot T^4,$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^8$ Вт/(м²·К⁴) - постоянная Стефана – Больцмана, T - температура абсолютно черного тела.

8. Длина волны λ_{max} , которой соответствует максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела (первый закон "смещения" Вина):

$$\lambda_{max} = \nu/T,$$

где $\nu = 2,9 \cdot 10^{-3}$ м·К - постоянная первого закона Вина.

9. Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости (максимальная излучательная способность) абсолютно черного тела $r_{\lambda, max}^*$ (второй закон Вина):

$$r_{\lambda, max}^* = C \cdot T^5, \text{ где } c = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/(м}^3 \cdot \text{К}^5 \text{)}.$$

10. Формула Релея - Джинса:

$$r_{\lambda, T}^* = 2\pi \cdot C \cdot k \cdot T / \lambda^4,$$

где C - скорость света в вакууме; k - постоянная Больцмана; T - абсолютная температура; λ - длина волны излучения.

11. Формула Планка:

$$r_{\lambda, T}^* = \left[2\pi \cdot h \cdot C^2 / \lambda^5 \right] \cdot [1 / (\exp(h \cdot C / \lambda \cdot k \cdot T) - 1)].$$

5.1. Энергия, импульс и масса фотона. Фотоэффект. Давление света

Примеры решения задач

Задача 1. Рубиновый лазер излучает в импульсе длительностью $\tau = 0,5 \cdot 10^{-3}$ с энергию $W = 1$ Дж в виде почти параллельного пучка с площадью сечения $S = 0,8$ см². Длина волны лазера $\lambda = 0,694$ мкм. Определить плотность потока фотонов в пучке и давление света на площадку, расположенную перпендикулярно пучку. Коэффициент отражения $\rho = 0,6$ (Расчет давления произвести с помощью корпускулярных представлений о природе света).

Решение

Согласно корпускулярной теории, свет - это поток фотонов. Каждый из фотонов обладает энергией ε и импульсом P_γ . Известно, что

$$\varepsilon = h \cdot \nu = h \cdot C / \lambda; \quad P_\gamma = h \cdot \nu / C = h / \lambda, \quad (1)$$

где $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка. Направление вектора $\vec{P}_\gamma$ совпадает с направлением распространения света. Общее число фотонов, излучаемых лазером,

$$N = W / \varepsilon = W / (h \cdot \nu) = (W \cdot \lambda) / (h \cdot C). \quad (2)$$

Если мощность лазера постоянна в течение времени излучения и по площади поперечного сечения пучка, то плотность потока фотонов можно записать в виде

$$I = N / (S \cdot \tau). \quad (3)$$

Давление света на произвольную площадку S' определяется изменением импульса фотонов при их ударе об эту площадку. Отражение света равнозначно абсолютно упругому удару, поглощение – неупругому. Если площадка S' расположена перпендикулярно направлению распространения света (т.е. перпендикулярно импульсу $\vec{P}_\gamma$ фотона до удара), то импульсы фотона после упругого и неупругого ударов соответственно равны: $\vec{P}'_\gamma = -\vec{P}_\gamma$; $\vec{P}''_\gamma = 0$. Изменение импульса одного фотона в результате удара

$$\Delta \vec{P}'_\gamma = 2\vec{P}_\gamma; \quad \Delta \vec{P}''_\gamma = -\vec{P}_\gamma. \quad (4)$$

Если за некоторый промежуток времени Δt о площадку ударится ΔN фотонов (причем $\Delta N'$ из них отразится), то суммарное изменение импульса всех ударившихся о площадку фотонов

$$\Delta \vec{P} = \Delta \vec{P}'_\gamma \Delta N' + \Delta \vec{P}''_\gamma (\Delta N - \Delta N'). \quad (5)$$

Коэффициент отражения равен отношению отраженной энергии к падающей:

$$\rho = \Delta N' \varepsilon / (\Delta N \varepsilon).$$

Число отразившихся фотонов

$$\Delta N' = \rho \cdot \Delta N. \quad (6)$$

Согласно второму и третьему законам Ньютона за промежуток времени Δt средняя сила $\langle F \rangle$, действующая на площадку S' со стороны фотонов,

$$\langle \vec{F} \rangle \cdot \Delta t = \Delta \vec{P}. \quad (7)$$

Тогда давление света на площадку S'

$$P = \langle F \rangle / S'. \quad (8)$$

Равенство (8) справедливо, когда сила $\langle F \rangle$ нормальна площадке S' . Подставляем (2) в формулу (3) и получаем

$$I = W \cdot \lambda / (h \cdot C \cdot S \cdot \tau) = 8,8 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}.$$

Чтобы найти давление света, подставим (4) и (6) в выражение (5):

$$\Delta \vec{P} = -\vec{P}_\gamma \cdot \Delta N \cdot (1 + \rho).$$

Тогда, согласно (7), сила, действующая на площадку S' , равна:

$$\langle \vec{F} \rangle = \vec{P}_\gamma \cdot (1 + \rho) \cdot \Delta N / \Delta t. \quad (9)$$

Из (9) следует, что сила $\langle \vec{F} \rangle$ сонаправлена вектору импульса фотонов в падающем пучке и, следовательно, перпендикулярна площадке S' . Поэтому можно использовать формулу (8).

$$P = P_{\gamma} \cdot (1 + \rho) \cdot \Delta N / (S' \cdot \Delta t).$$

Так как плотность потока фотонов не изменяется со временем вдоль сечения светового пучка, то очевидно, что

$$\Delta N / (S' \cdot \Delta t) = I.$$

Учитывая второе из выражений (1), получаем

$$P = h \cdot I \cdot (1 + \rho) / \lambda = 0,13 \text{ Па}.$$

Задача 2. На уединенный медный шарик падает монохроматический свет с $\lambda = 0,165$ мкм (ультрафиолетовый). До какого потенциала зарядится шарик, если работа выхода электрона для меди $A = 4,5$ эВ?

Решение

Под действием падающего ультрафиолетового излучения происходит вырывание электронов из металла (фотоэффект). Вследствие вылета электронов медный шарик заряжается положительно. Электрическое поле шарика тормозит вылетевшие электроны, однако если их кинетическая энергия достаточно велика для преодоления электростатического притяжения, то они будут уходить практически в бесконечность, при этом потенциал шарика возрастает. Максимальный потенциал $\varphi_{\max}$, до которого может зарядиться шарик, определяется наибольшей начальной кинетической энергией W электронов, с которой электроны вылетают из металла:

$$e \cdot \varphi_{\max} = W. \quad (1)$$

Эта энергия может быть определена из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h \cdot \nu = W + A. \quad (2)$$

Найдем W (2):

$$W = h \cdot \nu - A = h \cdot C / \lambda - A.$$

Тогда, учитывая (1), имеем

$$\varphi_{\max} = (h \cdot C / \lambda - A) / e, \varphi_{\max} = 3 \text{ В}.$$

Задача 3. Пучок параллельных лучей монохроматического света с $\lambda = 663$ нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность. Поток излучения $\Phi = 0,6$ Вт. Определить: 1) силу давления $\langle F \rangle$, испытываемую этой поверхностью; 2) число фотонов n_1 , падающих каждую секунду на поверхность.

Решение

1. Известно, что

$$\langle F \rangle = P \cdot S, \quad (1)$$

где P - световое давление на площадь S ,

$$P = (E_e / C) \cdot (1 + \rho), \quad (2)$$

где E_e - энергетическая освещенность (облученность); C - скорость света в вакууме; ρ - коэффициент отражения. В (1) заменим P согласно (2):

$$\langle F \rangle = (E_e \cdot S / C) \cdot (1 + \rho). \quad (3)$$

Энергетическая освещенность E_e есть величина, численно равная энергии, падающей на единичную площадку в единицу времени:

$$\Phi = E_e \cdot S.$$

Поэтому

$$\langle F \rangle = \Phi / C \cdot (1 + \rho),$$

где $\Phi = 0,6$ Вт; $C = 3 \cdot 10^8$ м/с; $\rho = 1$ (поверхность зеркальная).

2. Поток излучения можно выразить:

$$\Phi = \varepsilon \cdot n_1,$$

где ε - энергия одного фотона; n_1 - число фотонов, падающих на поверхность в единицу времени. Так как

$$\varepsilon = h \cdot C / \lambda, \quad \text{то} \quad \Phi = h \cdot C \cdot n_1 / \lambda.$$

Откуда

$$n_1 = \Phi \cdot \lambda / (h \cdot C) = 2 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

Задача 4. Определить максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda_1 = 0,155$ мкм; 2) γ -лучами с $\lambda_2 = 1$ пм.

Решение

Максимальную энергию фотоэлектронов $W_{\max}$ можно определить из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\varepsilon = A + W_{\max}, \quad (1)$$

где энергия фотона

$$\varepsilon = n \cdot C / \lambda, \quad (2)$$

A - работа выхода.

Кинетическая энергия электрона может быть выражена или по классической формуле:

$$W_{\min} = m_e \cdot v^2 / 2, \quad (3)$$

где m_e - масса электрона, или по релятивистской формуле:

$$W_{\min} = W_0 \cdot \left[\left(1 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{C^2}} \right) - 1 \right] \quad (4)$$

в зависимости от того, какая скорость сообщается фотоэлектрону. Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект. Если энергия ε фотона много меньше энергии покоя W_0 электрона, то может быть применена формула (3). Если же ε сравнима по величине с W_0 , то расчет производится по формуле (4).

1. Вычислим энергию фотона ультрафиолетовых лучей по формуле (2):

$$\varepsilon_1 = 8 \text{ эВ.}$$

Энергия покоя электрона $W_0 = 0,51 \text{ МэВ}$. $\varepsilon_1 \ll W_0$, значит, расчет кинетической энергии в формуле (1) можно вести по формуле (3):

$$\varepsilon_1 = A + m_e \cdot v_{\max}^2 / 2.$$

Откуда, учитывая, что работа выхода электронов из серебра $A = 4,7 \text{ эВ} = 0,75 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$, получаем

$$v_{\max} = \sqrt{2(\varepsilon_1 - A)/m_e} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

2. Вычислим энергию фотона γ -лучей:

$$\varepsilon_2 = h \cdot C / \lambda_2 = 1,24 \text{ МэВ,}$$

$A \ll \varepsilon_2$. Поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия $W_{\max}$ электрона равна энергии фотона: $W_{\max} = \varepsilon_2 = 1,24 \text{ МэВ}$. В этом случае $W_{\max} \gg W_0$. Поэтому следует использовать формулу (4):

$$W_{\max} = W_0 \cdot \left[\left(1 / \sqrt{1 - \frac{v_{\max}^2}{C^2}} \right) - 1 \right].$$

Откуда, зная, что $W_{\max} = \varepsilon_2$, получим

$$v_{\max} = \left[C \cdot \sqrt{(2W_0 + \varepsilon_2) \cdot \varepsilon_2 / (W_0 + \varepsilon_2)} \right],$$

$$v_{\max} = 2,85 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Задача 5. Наблюдается внешний фотоэффект на фотоэлементе с цезиевым катодом. Длина волны падающего излучения $\lambda = 0,331 \text{ мкм}$. Работа выхода для цезия $A = 1,89 \text{ эВ}$. Найти импульс вылетающего электрона и импульс, получаемый катодом при вылете одного электрона. Электроны вылетают навстречу падающему свету нормально к поверхности катода

Решение

Согласно квантовым представлениям, вылет электронов из металла при фотоэффекте есть результат взаимодействия фотон-электрон. Система фотон-электрон не является замкнутой. Система, включающая фотон, электрон, кристаллическую решетку катода, замкнута, и для нее справедлив закон сохранения импульса. До взаимодействия импульс данной системы равен импульсу фотона $\vec{P}_\gamma$; после взаимодействия - импульсу электрона $\vec{P}_e$ и кристаллической решетки $\vec{P}_K$. Запишем закон сохранения импульса:

$$\vec{P}_\gamma = \vec{P}_e + \vec{P}_K. \quad (1)$$

Будем учитывать энергию W_e , полученную электроном. Энергией, полученной кристаллической решеткой можно пренебречь, т.к. масса ее несоизмеримо больше массы и электрона и фотона. Согласно уравнению Эйнштейна, энергия падающего фотона

$$h \cdot \nu = W_e = W_{\max} + A \quad . \quad (2)$$

Уравнение (2) позволяет рассчитать $W_{\max}$ - максимальную кинетическую энергию, с которой электроны покидают катод, а следовательно, и его импульс, т.к.

$$W_{\max} = P_e^2 / (2 \cdot m_e). \quad (3)$$

Чтобы уравнение (1) записать в скалярном виде, введем ось X, направленную перпендикулярно поверхности катода по световому пучку. Тогда

$$P_{\gamma X} = +P_{\gamma} = h/\lambda; P_{eX} = -P_e = -\sqrt{2 \cdot m_e \cdot W_{\max}}.$$

Так как векторы $\vec{P}_{\gamma}$ и $\vec{P}_e$ направлены в противоположные стороны, то очевидно (1), что вектор $\vec{P}_K$ должен быть сонаправлен вектору $\vec{P}_{\gamma}$. Значит, $P_{KX} = P_K$. Тогда

$$P_{\gamma X} = P_{eX} + P_{KX} \quad \text{или} \\ h/\lambda = -\sqrt{2 \cdot m_e \cdot W_{\max}} + P_K. \quad (4)$$

В формулу (4) поставим $W_{\max}$ из (2) и получим:

$$P_K = h/\lambda + \sqrt{2 \cdot m_e \cdot (h \cdot C/\lambda - A)}, \quad P_K = 7,38 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Импульс вылетевшего электрона, направленный в сторону, противоположную векторам $\vec{P}_K$ и $\vec{P}_{\gamma}$,

$$P_K = \sqrt{2 \cdot m_e \cdot (h \cdot C/\lambda - A)} = 7,36 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Задачи, рекомендуемые для аудиторных занятий

Задача 1. Определить энергию, массу и импульс фотона с длиной волны $\lambda = 1,24$ нм.

Ответ: $1,60 \cdot 10^{-16}$ Дж; $1,78 \cdot 10^{-33}$ кг; $5,33 \cdot 10^{-25}$ кг·м·с⁻¹.

Задача 2. На пластину падает монохроматический свет ($\lambda = 0,42$ мкм). Фототок прекращается при задерживающей разности потенциалов $U = 0,95$ В. Определить работу выхода электронов с поверхности пластины.

Ответ: 2 эВ.

Задача 3. На цинковую пластину падает пучок ультрафиолетовых лучей ($\lambda = 0,2$ мкм). Определить максимальную кинетическую энергию и максимальную скорость фотоэлектронов, если $A_z = 4$ эВ.

Ответ: 2,2 эВ; $8,8 \cdot 10^5$ м/с.

Задача 4. Определить максимальную скорость фотоэлектрона, вырванного с поверхности металла γ -квантом с энергией 1,53 МэВ.

Ответ: $2,91 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 5. Поток энергии, излучаемый электрической лампой, 600 Вт. На расстоянии 1 м от лампы перпендикулярно падающим лучам расположено круглое плоское зеркальце диаметром 2 см. Определить силу светового давления на зеркальце. Лампу рассматривать как точечный изотропный излучатель.

Ответ: 0,1 нН

Задача 6. Параллельный пучок монохроматических лучей с $\lambda = 0,663$ мкм падает на зачерненную поверхность и производит на нее давление $P = 0,3$ мкПа. Определить концентрацию фотонов в световом пучке.

Ответ: 10^{12} м^{-3} .

Задача 7. Найти длину волны рентгеновского излучения, у которого энергия фотона равна энергии покоя электрона.

Ответ: $2,5 \cdot 10^{-2} \text{ А}.$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти энергию фотона излучений: 1) красного ($\lambda = 0,7$ мкм); 2) зеленого ($\lambda = 0,55$ мкм); 3) фиолетового ($\lambda = 0,4$ мкм); 4) инфракрасного ($\lambda = 10$ мкм).

Ответ: 1) $0,284 \cdot 10^{-18}$ Дж; 2) $0,361 \cdot 10^{-18}$ Дж; 3) $0,497 \cdot 10^{-18}$ Дж; 4) $0,02 \cdot 10^{-18}$ Дж.

2. Во сколько раз энергия фотона ($\lambda = 550$ нм) больше средней кинетической энергии поступательного движения молекулы кислорода при комнатной температуре (17° С)?

Ответ: в 36 раз.

3. Определить длину волны, если соответствующий ей фотон обладает энергией 10^{-19} Дж. К какой части спектра принадлежит эта длина волны?

Ответ: 2 мкм; инфракрасная часть спектра.

4. При помощи индукционного ускорителя электронов (бетатрона) можно подучить фотоны γ -лучей с энергией 100 МэВ. Какова длина волны этих лучей?

Ответ: $12,4 \cdot 10^{-15} \text{ м}.$

5. Какой длиной волны должен обладать фотон, релятивистская масса которого $1,66 \cdot 10^{-30}$ кг?

Ответ: $1,33 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$

6. Доказать, что свободный, покоящийся в вакууме электрон не может поглотить фотон.

7. Доказать, что равномерно и прямолинейно движущийся в вакууме электрон не может излучить фотон.

8. Точечный источник света потребляет мощность 100 Вт и равномерно испускает свет во все стороны. Длина волны испускаемого света $\lambda = 589$ нм. К.п.д. источника 0,1 %. Вычислить число фотонов, испускаемых источником за 1 с.

Ответ: $n = \eta \cdot N \cdot \lambda \cdot t / h \cdot C = 3 \cdot 10^{17} \text{ с}^{-1}$.

9. Флуктуации слабых световых потоков были впервые обнаружены визуальным методом и изучены С. И. Вавиловым. Число фотонов в световом потоке изменяется от 90 до 120 за 1 с (частота одинакова). Определить при этом изменение мощности световых потоков.

Ответ: $N_1 / N_2 = 3/4$.

10. Будет ли иметь место фотоэффект у лития, если он освещается монохроматическим светом с длиной волны 589 нм?

Ответ: нет, т.к. энергия кванта равна 2,11 эВ и меньше работы выхода электронов из металла на 0,29 эВ.

11. Определить красную границу фотоэффекта для платины, серебра, вольфрама, тантала и цезия.

Ответ: 235 нм; 262 нм; 276 нм; 305 нм; 631 нм.

12. Красная граница фотоэффекта для железа, ртути, лития, натрия, калия определяется соответственно длинами волн 262, 274, 517, 540, 620 нм. Найти работу выхода электронов из металлов и выразить ее в электрон-вольтах.

Ответ: 4,7 эВ; 4,5 эВ; 2,4 эВ; 2,3 эВ; 2,0 эВ.

13. На поверхность металла падают γ -лучи ($\lambda = 1,2$ пм). По сравнению с энергией γ -фотонов работа выхода настолько мала, что ею можно пренебречь. Какова скорость вылета электронов, если вычислять ее по уравнению Эйнштейна для фотоэффекта? Чем объяснить полученный результат?

Ответ: $v = \sqrt{2 \cdot n \cdot C \cdot m \cdot \lambda} = 600$ Мм/с. Получилось, что $v > C$, т.к. не учитывалась зависимость массы электрона от скорости его движения.

14. Какова максимальная скорость электронов, вылетающих с поверхности молибдена при освещении его лучами с длиной волны 200 нм?

Ответ: $v = \sqrt{2 \cdot (h \cdot C - A \cdot \lambda) / m \cdot \lambda} = 840$ км/с.

15. Какой длины электромагнитную волну следует направить на поверхность цинка, чтобы максимальная скорость электрона, вылетевшего из металла, была 0,8 Мм/с?

Ответ: 213 нм.

16. Красная граница фотоэффекта для платины лежит около 198 нм. Если платину прокалить при высокой температуре, то красная граница фотоэффекта станет равной 220 нм. На сколько электрон-вольт прокалывание уменьшает работу выхода электронов?

Ответ: на 0,6 эВ.

17. На незаряженную металлическую пластинку, присоединенную к электрометру, направили пучок рентгеновских лучей. Когда пластинка за-

рядилась до потенциала 124 В, испускание электронов прекратилось. Определить длину волны рентгеновских лучей. Работой выхода электронов можно пренебречь.

Ответ: $\lambda = h \cdot C / e \cdot U = 10 \text{ нм}$.

18. Изолированная металлическая пластинка освещается светом с длиной волны 450 нм. Работа выхода электронов из металла 2 эВ. До какого потенциала зарядится пластинка при непрерывном действии света?

Ответ: 0,75 В.

19. Фотоэлектроны, вырывающиеся с поверхности некоторого металла светом с частотой $2,2 \cdot 10^{15}$ Гц, полностью задерживаются потенциалом 6,6 В, а вырывающиеся светом с частотой $4,6 \cdot 10^{15}$ Гц - потенциалом 16,5 В. Найти постоянную Планка (этот метод измерения постоянной Планка был предложен П. И. Лукирским).

Ответ: $6,6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

20. Плотность потока световой энергии на поверхности 7 кВт/м². Найти световое давление для случаев, когда поверхность: 1) полностью отражает все лучи; 2) полностью поглощает все падающие на нее лучи.

Ответ: 1) 46,6 мкПа; 2) 23,3 мкПа.

21. Давление излучения на плоское зеркало 0,2 Па. Определить интенсивность света, падающего на поверхность зеркала с коэффициентом отражения 0,6. Считать, что световой поток падает на поверхность зеркала нормально.

Ответ: 37,5 МВт/м².

22. Русский астроном Ф. А. Бредихин объяснил форму кометных хвостов давлением солнечных лучей. Найти: 1) световое давление солнечных лучей на абсолютно черное тело, помещенное на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля; 2) какую массу должна иметь частица в кометном хвосте, помещенная на этом расстоянии, чтобы сила светового давления на неё уравновешивалась силой притяжения частицы Солнцем? Площадь частицы, отражающей все падающие на нее лучи, считать равной $0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2$. Солнечная постоянная, т.е. лучистая энергия, которую посылает Солнце каждую секунду через поверхность площадью 1 м², расположенную перпендикулярно солнечным лучам и находящуюся вблизи Земли за пределами ее атмосферы, равна $C = 1,4 \text{ кВт/м}^2$.

Ответ: 1) 4,7 мкПа; 2) $4 \cdot 10^{-16}$ кг.

23. Световой поток мощностью 9 Вт нормально падает на поверхность площадью 10 см², коэффициент отражения которой равен 0,8. Какое давление испытывает при этом данная поверхность?

Ответ: 54 мкПа.

24. На поверхность площадью 10 см² падает пучок фотонов интенсивностью 10^{18} с^{-1} . $\lambda = 500 \text{ нм}$. Определить световое давление на поверхность, если коэффициент отражения поверхности равен 0,7.

Ответ: $P = I \cdot (1 + \rho) / C = n \cdot h \cdot (1 + \rho) / \lambda \cdot S = 2,25 \text{ мкПа}$.

25. Мощность электрической лампы 45 Вт. Вычислить давление чистой энергии на зеркальную поверхность (коэффициент отражения равен 1), расположенную нормально к падающим лучам на расстоянии 1 м от лампы.

Ответ: $P = N \cdot (1 + \rho) / 4\pi \cdot r^2 \cdot C = 24$ нПа.

26. Небольшая электрическая дуга, расходующая на излучение мощность 600 Вт, расположена в центре кривизны вогнутого зеркала поверхностью $S = 300$ см². Допуская, что дуга излучает равномерно по всем направлениям, определить силу давления света на зеркало. Радиус кривизны зеркала 10 см; зеркало считать идеально отражающим.

Ответ: $F = N \cdot S \cdot (1 + \rho) / 4\pi \cdot r^2 \cdot C = 0,96$ мкН.

27. Колба электрической лампы представляет собой сферу радиусом 3 см. Часть стенки колбы изнутри посеребрена. Лампа потребляет мощность 60 Вт, 80 % которой затрачивается на излучение. Определить, во сколько раз давление газа в колбе (13,3 мкПа) меньше светового давления на посеребренную часть стенки колбы с коэффициентом отражения, равным 0,8.

Ответ: $P_C/P_2 = 0,8 \cdot N / 4\pi \cdot r^2 \cdot P_2 \cdot C = 1,9$ раза.

28. Определить диаметр шарообразного спутника, движущегося вокруг Земли, если сила давления солнечного света на спутник 11,2 мН, коэффициент отражения света от поверхности спутника равен 1; солнечная постоянная $C = 1,4$ кВт/м² (см. задачу 22). Поглощением солнечного света в атмосфере пренебречь.

Ответ: 39 м.

5.2. Тормозное рентгеновское излучение. Эффект Комптона. Тепловое излучение

Примеры решения задач

Задача 1. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta = 90^\circ$. Энергия рассеянного фотона $\varepsilon_2 = 0,4$ МэВ. Определить энергию фотона ε_1 до рассеяния.

Решение

Для определения энергии первичного фотона воспользуемся формулой Комптона:

$$\Delta\lambda = 2 \cdot h \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2} / m_0 \cdot C, \quad (1)$$

где $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ - изменение длины волны фотона в результате рассеяния на свободном электроны; h - постоянная Планка; m_0 - масса покоя электрона; C - скорость света в вакууме; θ - угол рассеяния фотона. Выразим длины волн через энергии:

$$\lambda_1 = h \cdot C / \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad \lambda_2 = h \cdot C / \varepsilon_2.$$

Подставим в формулу (1) и умножим числитель и знаменатель правой части формулы на C . Тогда получим

$$\frac{h \cdot C}{\varepsilon_2} - \frac{h \cdot C}{\varepsilon_1} = \frac{h \cdot C}{m_0 \cdot C^2} \cdot 2 \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 \cdot m_0 \cdot C^2}{m_0 \cdot C^2 - \varepsilon_2 \cdot 2 \cdot \sin^2 \theta / 2}$$

или

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_2 \cdot E_0}{E_0 - 2 \cdot \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \theta / 2}, \quad (2)$$

где $E_0 = m_0 \cdot C^2$ - энергия покоя электрона.

Ответ: $\varepsilon_1 = 1,85 \text{ МэВ}$.

Задача 2. Длина волны, на которую приходится максимум энергии в спектре излучения абсолютно черного тела, $\lambda_{\max} = 0,85 \text{ мкм}$. Определить энергетическую светимость (излучательность) $R_{\mathcal{O}}$ поверхности тела.

Решение

Энергетическая светимость $R_{\mathcal{O}}^*$ абсолютно черного тела в соответствии с законом Стефана-Больцмана:

$$R_{\mathcal{O}}^* = \sigma \cdot T^4, \quad (1)$$

где σ - постоянная Стефана-Больцмана; T - термодинамическая температура, которую можно вычислить с помощью закона смещения Вина:

$$\lambda_{\max} = \nu / T, \quad (2)$$

где ν - постоянная Вина. Используя формулы (1) и (2), получим

$$R_{\mathcal{O}}^* = \sigma \cdot \nu^4 / (\lambda_{\max})^4.$$

Ответ: $\lambda_{\max} = 5,8 \cdot 10^{-7} \text{ м.}, \quad R_{\mathcal{O}}^* = 35,4 \text{ МВт/м}^2$.

Задача 3. Солнечная постоянная $C = 1,4 \text{ кВт/м}^2$ (см. задачу 22 из предыдущей темы). Считая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, определить температуру его излучающей поверхности.

Решение

Известно, что согласно закону Стефана-Больцмана, энергетическая светимость абсолютно черного тела

$$R_{\mathcal{O}}^* = \sigma \cdot T^4. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$R_{\odot}^* = C \cdot 4\pi \cdot R^2 / 4\pi \cdot r^2, \quad (2)$$

где R - среднее расстояние от Земли до Солнца; r - радиус Солнца. Сравнивая формулы (1) и (2), запишем

$$\sigma \cdot T^4 = C \cdot R^2 / r^2.$$

Откуда

$$T = \sqrt[4]{C \cdot R^2 / \sigma \cdot r^2}.$$

Ответ: $T = 5800 \text{ К}$.

Задача 4. Железный шар диаметром 10 см, нагретый до температуры 1227°С , остывает на открытом воздухе. Через какое время его температура понизится до 1000 К ? При расчете принять, что отношение энергетических светимостей железа и абсолютно черного тела 0,5. Теплопроводностью воздуха пренебречь.

Решение

Количество теплоты, теряемое шаром при понижении температуры на dT :

$$dQ = C \cdot m \cdot dT,$$

или, заменяя $m = 4\pi \cdot r^3 \cdot \rho / 3$, получаем

$$dQ = 4\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot C \cdot dT / 3, \quad (1)$$

где ρ - плотность железа; C - удельная теплоемкость железа.

С другой стороны,

$$dQ = k \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot S \cdot dT$$

или

$$dQ = 4\pi \cdot r^2 \cdot k \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot dT, \quad (2)$$

где dT - время излучения, соответствующее понижению температуры на dT ; k - постоянная Больцмана; r - радиус шара. Сравнивая формулы (1) и (2), запишем

$$4\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot C \cdot dT / 3 = 4\pi \cdot r^2 \cdot k \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot dT.$$

Откуда

$$dT = C \cdot \rho \cdot r \cdot T^{-4} \cdot dT / 3 \cdot k \cdot \sigma. \quad (3)$$

После интегрирования (3) получим

$$t = \frac{C \cdot \rho \cdot r}{3 \cdot k \cdot \sigma} \int_{T_1}^{T_2} T^{-4} \cdot dT = \frac{C \cdot \rho \cdot r}{3 \cdot k \cdot \sigma} \cdot \left(\frac{1}{T_2^3} - \frac{1}{T_1^3} \right).$$

Ответ: $t = 1503 \text{ с}$.

Задача 5. Пользуясь формулой Планка, получить закон Стефана-Больцмана.

Решение

Известно, что

$$R_{\odot}^* = \int_0^{\infty} f(\omega, T) \cdot d\omega.$$

Используя формулу Планка, запишем

$$R_{\odot}^* = \frac{\hbar}{4\pi^2 \cdot C^2} \left(\frac{k \cdot T}{\hbar} \right)^4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{x^3 \cdot dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2 \cdot k^4}{60 \cdot C^2 \cdot \hbar^3} \cdot T^4,$$

где $\hbar = h/2\pi$; h - постоянная Планка; $x = \hbar \cdot \omega / k \cdot T$; k - постоянная Больцмана; C - скорость света в вакууме. Проведем расчет:

$$R_{\odot}^* = \left[5,6 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) \right] \cdot T^4.$$

Так как $R_{\odot}^* = \sigma \cdot T^4$, то

$$\sigma = 5,6 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4).$$

Задачи, рекомендуемые для аудиторных занятий

Задача 1. Вычислить энергию, излучаемую за 1 мин с площади 1 см^2 абсолютно черного тела, температура которого 1000 К .

Ответ: 340 Дж .

Задача 2. Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела $0,6 \text{ мкм}$. Определить температуру тела.

Ответ: 4820 К .

Задача 3. Определить угол θ рассеяния фотона, испытавшего соударение со свободным электроном, если изменение длины волны при рассеянии $3,63 \text{ пм}$.

Ответ: 120° .

Задача 4. Электрон с энергией 5 ГэВ сталкивается "в лоб" с летящим ему навстречу фотоном видимого света ($\varepsilon = 1 \text{ эВ}$). Найти энергию отразившегося фотона. (Это явление называется обратным Комптон-эффектом).

Ответ: 382 МэВ .

Задача 5. Угол рассеяния фотона в эффекте Комптона равен θ . Угол отдачи электрона φ . Определить энергию фотона до рассеяния. Сделать расчёт для $\theta = 90^\circ$; $\varphi = 30^\circ$.

Ответ: 0,37 МэВ.

Задача 6. Наименьшая длина волны рентгеновских лучей, полученных от трубки, которая работает при напряжении 40 кВ, равна 31 пм. Вычислить по этим данным постоянную Планка.

Ответ: $6,61 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Задача 7. Найти для свинца толщину слоя, уменьшающего вдвое интенсивность падающих рентгеновских лучей некоторой длины волны. Массовый коэффициент поглощения свинца для этой длины волны $6,8 \cdot 10^{-3}$ м²/кг.

Ответ: 0,9 см.

Задача 8. Температура поверхности звезды 12000 К. Можно ли определить эту температуру по закону смещений Вина, если земная атмосфера поглощает все лучи с длиной волны короче 290 нм?

Ответ: нельзя, т.к. $\lambda_{\max} = 242$ нм.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить скорость электронов в рентгеновской трубке, прошедших разность потенциалов 10 кВ.

Ответ: 59,3 Мм/с

2. Наименьшая длина волны сплошного спектра рентгеновских лучей, полученного в результате торможения электронов на антикатоде рентгеновской трубки, $\lambda = 0,5$ нм. Какова наибольшая скорость электронов?

Ответ: $v = \sqrt{2 \cdot h \cdot C / m \cdot \lambda} = 29,5$ Мм/с.

3. Антикатоде рентгеновской трубки бомбардируется электронами, скорость которых 100 Мм/с. Определить максимальную частоту излучения в сплошном рентгеновском спектре с учетом зависимости релятивистской массы электрона от скорости его движения.

Ответ: $7,3 \cdot 10^{18}$ Гц.

4. Рентгеновская трубка работает при напряжении 30 кВ. Найти наименьшее значение длины волны рентгеновского излучения.

Ответ: 41,4 пм.

5. Вычислить комптоновское смещение и относительное изменение длины волны: 1) для видимого света ($\lambda = 500$ нм) и 2) для γ -лучей ($\lambda = 5$ нм) при рассеянии на первоначально покоившихся свободных электронах. Угол рассеяния 90° .

Ответ: $\Delta\lambda = 2,4$ пм не зависит от длины волны света. Относительное изменение длины волны: 1) $0,48 \cdot 10^{-5}$; 2) 0,48.

6. Фотон при столкновении с релятивистским электроном рассеялся под углом 60° , а электрон потерял почти всю кинетическую энергию. Найти изменение длины волны фотона при рассеянии, если до столкновения он обладал энергией 0,51 МэВ.

Ответ: $\Delta\lambda = -2,1 \cdot 10^{-12}$ м.

7. Определить максимальные комптоновские изменения длины волны при рассеянии фотонов на свободных первоначально покоившихся электронах и ядрах атомов водорода.

Ответ: $\Delta\lambda_m = 2 \lambda_C$; 4,8 пм и 2,6 фм.

8. Рентгеновское излучение с длиной волны 56,3 пм рассеивается плиткой графита. Определить длину волны лучей, рассеянных под углом 120° к первоначальному направлению рентгеновских лучей.

Ответ: 59,9 пм.

9. γ -лучи с длиной волны 2,7 пм испытывают комптоновское рассеяние. Во сколько раз длина волны излучения, рассеянного под углом 180° к первоначальному направлению, больше длины волны падающего излучения?

Ответ: в 2,8 раза.

10. Фотон жестких рентгеновских лучей ($\lambda = 24$ пм) при соударении со свободным электроном передал ему 9 % своей энергии. Определить длину волны рассеянного рентгеновского излучения.

Ответ: 26,7 пм.

11. Изменение длины волны рентгеновских лучей при комптоновском рассеянии 2,4 пм. Вычислить угол рассеяния и энергию, переданную при этом электроном отдачи, если длина волны рентгеновских лучей до взаимодействия 10 пм.

Ответ: $\Delta E = h \cdot C \cdot \Delta\lambda / [\lambda(\lambda + \Delta\lambda)] = 24$ кэВ.

12. Фотон с энергией 0,75 МэВ рассеялся на свободном электроне под углом 60° . Найти энергию рассеянного фотона, кинетическую энергию и импульс электрона отдачи. Кинетической энергией электрона до соударения пренебречь.

Ответ: 0,43 МэВ; 0,32 МэВ; $0,42 \cdot 10^{-27}$ Н·с.

13. Какова температура печи, если известно, что из отверстия в ней площадью 4 см^2 излучается за 1 с энергия 22,7 Дж? Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: 1000 К.

14. Земля вследствие излучения в среднем ежеминутно теряет с поверхности площадью 1 м^2 энергию 5,4 кДж. При какой температуре абсолютно черное тело излучало бы такую же энергию?

Ответ: 200 К.

15. Вычислить энергию, излучаемую с поверхности Солнца площадью 1 м^2 за 1 мин, приняв температуру его поверхности равной 5800 К. Считать, что Солнце излучает как абсолютно черное тело.

Ответ: 3,85 ГДж.

16. Найти мощность, излучаемую абсолютно черным шаром радиусом 10 см, который находится в комнате при температуре 20° С .

Ответ: 52,5 Вт.

17. Температура абсолютно чёрного тела изменяется от 727 до 1727° С . Во сколько раз изменится при этом энергия, излучаемая телом?

Ответ: увеличится в 16 раз.

18. Температура абсолютно черного тела 127° С . После повышения температуры суммарная мощность излучения увеличилась в 3 раза. На сколько повысилась при этом температура?

Ответ: 126 К.

19. Котел с водой при температуре 97° С излучает энергию на руку наблюдателя, на поверхности которой температура 27° С . Во сколько раз больше энергии получит тело при температуре 0° С такой же поверхности за одно и то же время на том же расстоянии? Излучение считать близким к излучению абсолютно черного тела.

Ответ: $R_{\text{Э}1}^* = \sigma(T_1^4 - T_2^4)$,

где T_1 - температура котла с водой; T_2 - температура поверхности руки;

$$R_{\text{Э}2}^* = \sigma(T_1^4 - T_3^4),$$

где T_3 - температура тела.

$$R_{\text{Э}2}^* / R_{\text{Э}1}^* = 1,24 \text{ раза.}$$

20. Какую энергию излучает в течение суток каменное оштукатуренное здание с поверхностью общей площадью 1000 м^2 , если температура излучающей поверхности 0°C ? Отношение энергетических светимостей каменного оштукатуренного здания и абсолютно черного тела для данной температуры равно 0,8.

Ответ: 21,8 ГДж.

21. При сжигании в вакууме тонкой вольфрамовой нити сильным электрическим током получается на мгновение весьма высокая температура. Длина волны, при которой излучательная способность этой нити максимальна, 145,0 нм. Определить температуру нити накала в момент ее сжигания.

Ответ: 20 кК.

22. В какой области спектра лежит длина волны, соответствующая максимуму излучательной способности Солнца, если температура его поверхности 5800 К,

Ответ: 0,5 мкм. Область видимого спектра.

23. Сколько энергии излучает абсолютно чёрное тело за 1 с со светящейся поверхности площадью 1 см^2 , если максимум излучательной способности приходится на длину волны 725,0 нм?

Ответ: 1,45 кДж

24. Из отверстия в печи площадью 10 см^2 излучается 250 Дж энергии за 1 минуту. В какой области спектра лежит длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности?

Ответ: инфракрасная область.

25. В излучении абсолютно чёрного тела максимум излучательной способности падает на длину волны 680 нм. Сколько энергии излучает это тело площадью 1 см^2 за 1 с и какова потеря его массы за 1 с вследствие излучения?

Ответ: 1870 Дж; $20,8 \cdot 10^{-12} \text{ г}$.

26. Длина волны, соответствующая максимуму излучательной способности абсолютно чёрного тела, 720 нм; площадь излучающей поверхности - 5 см^2 . Определить мощность излучения.

Ответ: 7,5 кВт.

27. Во сколько раз увеличится мощность излучения абсолютно черного тела, если максимум излучательной способности переместится от 700 до 600 нм?

Ответ: в 1,85 раза.

28. Температура абсолютно черного тела изменилась при нагревании от 1327 до 1727 $^\circ \text{C}$. На сколько изменилась при этом длина волны, на которую приходится максимум излучательной способности, и во сколько раз увеличилась максимальная излучательная способность?

Ответ: 360 нм; в 3,1 раза.

Варианты индивидуального задания

№ варианта	Тема 1	Тема 2
1	1,10,20	1,13,18
2	2,11,21	2,14,17
3	3,12,22	3,15,16
4	4,13,23	4,16,15
5	5,14,24	5,17,14
6	6,15,25	6,18,13
7	7,16,26	7,19,14
8	8,17,27	8,20,15
9	9,18,28	9,21,16
10	19,27,9	10,22,17
11	18,26,8	11,23,18
12	17,25,7	12,24,19
13	16,24,6	11,25,20
14	15,23,5	10,26,21
15	14,22,4	9,27,22
16	13,21,3	8,28,23
17	12,20,2	7,27,24
18	10,25,1	6,26,25
19	11,20,9	5,25,26
20	19,21,8	4,24,27
21	18,22,7	3,23,28
22	17,23,6	2,22,13
23	16,24,5	1,21,14
24	15,25,4	7,20,15
25	14,26,3	8,19,16

**ГЛАВА 6. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА.
АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА
6.1. Теория Бора. Волновые свойства частиц.
Принцип неопределенности
Основные формулы и понятия**

1. Первый постулат Бора (условие стационарных орбит):

$$m_0 v r = n \hbar,$$

где m_0 - масса электрона, r - номер стационарной орбиты, v - скорость электрона на стационарной орбите радиуса r , $\hbar = h/2\pi$, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с - постоянная Планка.

2. Радиусы стационарных орбит

$$r_n = n^2 r_1,$$

где $r_1 = 0,529 \cdot 10^{-10}$ м - радиус первой "Боровский" орбиты.

3. Второй постулат Бора (условие испускания и поглощения атомом электромагнитного излучения):

$$\nu = (E_n - E_m)/h,$$

где $\nu = \omega/2\pi$ - частота излучения, E_n и E_m - энергии электрона на стационарных орбитах с номерами n и m .

4. Полная энергия электрона в атоме водорода на n -ой орбите радиуса r_n :

$$E_n = -\frac{e^4 m_0}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{n^2} E_1,$$

где e - заряд электрона, m_0 - масса электрона, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - электрическая постоянная, E_1 - энергия основного (невозбужденного) состояния при $n = 1$.

5. Частоты излучений для водородоподобного атома

$$\nu = \frac{C}{\lambda} = R C Z^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

где m, n - номера орбит, λ - длина волны излучения, C - скорость света в вакууме, Z - порядковый номер водородоподобного иона в таблице элементов Д. И. Менделеева, $R = e^4 m_0 / 8 \varepsilon_0^2 h^3 C = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ - постоянная Ридберга.

6. Формула де Бройля:

$$\lambda = 2\pi \hbar / p,$$

где λ - длина волны де Бройля для частицы массой m_0 , $p = m_0 \cdot v$ импульс частицы.

7. Принцип неопределенности Гейзенберга для координаты и проекции импульса микрочастицы:

$$\Delta p_X \cdot \Delta X \geq \hbar,$$

где ΔX - неопределенность координаты, Δp_x - неопределенность проекции импульса на ось X.

8. Принцип неопределенности для энергии и времени:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar,$$

где ΔE - неопределенность полной энергии микрочастицы, Δt - неопределенность времени, в течение которого микрочастица имеет энергию E .

Примеры решения задач

Задача 1. Один из возбужденных атомов водорода при переходе в основное состояние испустил последовательно два кванта с длинами волн $\lambda_1 = 128,18$ нм и $\lambda_2 = 105,57$ нм. Какое число спектральных линий можно наблюдать, если все атомы водорода получили одинаковую энергию?

Решение

Число спектральных линий определяется числом термов, из комбинаций которых получаются спектральные линии. Каждый терм соответствует определённому главному квантовому числу. Число термов равно числу энергетических уровней, на которых может быть электрон, и определяется главным квантовым числом, соответствующим максимальной энергии возбуждённого атома.

Энергия атома водорода в возбужденном состоянии связана с главным квантовым числом n соотношением

$$E_n = -E_1/n^2, \quad (1)$$

где $E_1 = -13,6$ эВ = $-2,2 \cdot 10^{-18}$ Дж - энергия основного состояния.

По Бору атомы излучают энергию при переходе электрона из стационарного состояния с большей полной энергией электрона в стационарное состояние с меньшей энергией. По условию задачи атом переходит в основное состояние, излучив два кванта, поэтому

$$E_n = hc/\lambda_1 + hc/\lambda_2 + E_1 = -0,086 \cdot 10^{-18} \text{ Дж.}$$

Используя соотношение (1), получим, что главное квантовое число, соответствующее такому возбужденному состоянию, равно:

$$n = \sqrt{E_1/E_n} = \sqrt{2,2 \cdot 10^{-18} / 0,086 \cdot 10^{-18}} = 5.$$

Главное квантовое число может быть только целым числом.

Если каждый атом получает энергию, достаточную для заполнения пятого энергетического уровня, то термов пять. Их комбинация может привести к наблюдению десяти спектральных линий (рис. 6.1).

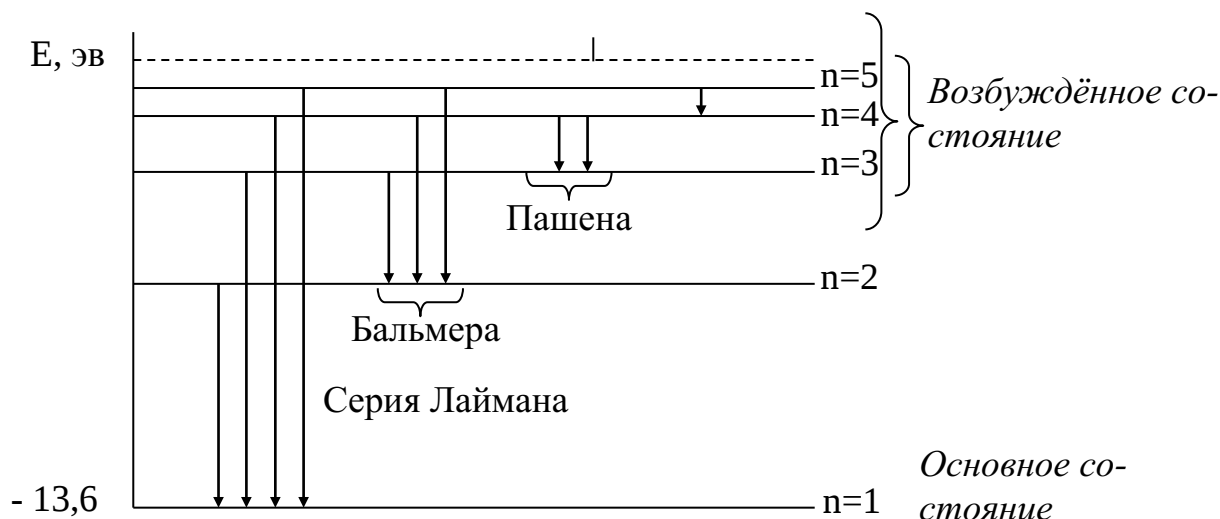


Рис. 6.1

Задача 2. Вычислить:

- а) радиусы второй r_2 и третьей r_3 стационарных орбит атома водорода;
- б) частоту ν перехода электрона с третьего энергетического уровня на второй;
- в) энергию ε испущенного кванта света;
- г) естественную ширину спектральной линии $\Delta\lambda$ этого перехода;
- д) длину волны де Бройля λ электрона, находящегося на второй и третьей стационарных орбитах;
- е) число длин волн де Бройля N электрона, укладывающихся на второй и третьей стационарных орбитах;
- ж) энергию ионизации E_i атома;
- з) нарисовать схему энергетических уровней атома водорода и обозначить указанный переход. К какой спектральной серии он относится?

Решение

1. Уравнение движения электрона в атоме водорода имеет вид

$$\frac{m\nu^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \quad (1)$$

Согласно первому постулату Бора, возможны лишь такие орбиты, для которых

$$m\nu r = n\hbar. \quad (2)$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} \nu &= e^2 / (4\pi\varepsilon_0 \hbar) \cdot n^2, \\ r &= (4\pi\varepsilon_0 \hbar^2) \cdot n^2 / e^2 m. \end{aligned} \quad (3)$$

Если $n = 1$, то

$r_1 = 0,529 \overset{0}{\text{Å}}$ - радиус первой "Боровской" орбиты, или "Боровский" радиус.

Если $n = 2$, то $r_2 = 4 \overset{0}{\text{Å}} = 2,12 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Если $n = 3$, то $r_3 = 9 \overset{0}{\text{Å}} = 4,77 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

2. Частоту перехода ν можно найти, если воспользоваться вторым постулатом Бора:

$$\nu = (E_3 - E_2) / 2\pi\hbar, \quad (4)$$

где E_2, E_3 - энергии соответствующих стационарных состояний, которые можно рассчитать, зная энергию основного состояния E_1 :

$$E_1 = \frac{e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} = -2,2 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = -13,6 \text{ эВ}.$$

Тогда

$$E_2 = E_1 / 4 = -0,54 \cdot 10^{-18} \text{ Дж},$$

$$E_3 = E_1 / 9 = -0,24 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Подставив значение энергии в формулу (4), получим

$$\nu = 4,53 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}.$$

Длина волны, соответствующая этой частоте, равна:

$$\lambda = c / \nu = 6,622 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 6622 \overset{0}{\text{Å}},$$

что соответствует красной части спектра.

3. Энергию испущенного кванта света определим по формуле Планка:

$$\varepsilon = h\nu = 2,99 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} = 1,86 \text{ эВ}.$$

4. Естественную ширину $\Delta\lambda$ спектральной линии можно найти, используя принцип неопределенности Гейзенберга для энергии и времени:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar.$$

Поскольку $\Delta E = h\Delta\nu$ и $\lambda = c/\nu$, то

$$\Delta\lambda = -\frac{c}{\nu^2} \Delta\nu = -\frac{\lambda^2}{c} \Delta\nu.$$

Следовательно

$$h \cdot \Delta\nu \geq \hbar / \Delta t, \quad \Delta\nu \approx 1 / 2\pi\Delta t, \quad \Delta\lambda = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\lambda^2}{c\Delta t},$$

где $\Delta t = 10^{-8} \text{ с}$ - время жизни атома в возбужденном состоянии.

Произведя численный расчет, получаем

$$\Delta\lambda \approx 2,32 \cdot 10^{-4} \overset{0}{\text{Å}}.$$

5. Длина волны де Бройля определяется по формуле

$$\lambda = 2\pi\hbar / m\nu.$$

Скорость электрона на второй орбите v_2 и на третьей орбите v_3 определяем из формулы (3) для $n = 2$ и $n = 3$:

$$v_2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \cdot \frac{1}{2^2} = 1,05 \cdot 10^6 \text{ м/с}, \quad v_3 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \cdot \frac{1}{3^2} = 0,7 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

Соответственно для λ_2 и λ_3 получим:

$$\lambda_2 \frac{2\pi\hbar}{mv_2} = 6,9 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 6,9 \text{ \AA}, \quad \lambda_3 \frac{2\pi\hbar}{mv_3} = 10,3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 10,3 \text{ \AA}.$$

6. Для определения числа волн де Бройля, укладывающихся на второй и третьей орбитах (N_2 и N_3), необходимо знать длины этих орбит, что легко сделать, так как радиусы этих орбит вычислены:

$$N_2 = 2\pi r_2 / \lambda_2 \approx 2, \quad N_3 = 2\pi r_3 / \lambda_3 \approx 3.$$

Таким образом, на второй Боровский орбите укладываются две длинные волны де Бройля, на третьей - три.

7. Энергия ионизации атома E_i определяется выражением:

$$E_i = eU_i = A_i,$$

где A_i - работа по удалению электрона с первой орбиты в бесконечность (за пределы атома), U_i - потенциал ионизации.

$$A_i = h\nu = hcR \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Если $m = 1$, $n = \infty$, то:

$$A_i = hcR = 13,6 \text{ эВ}.$$

8. Энергетический спектр атома водорода имеет вид (см. рис.6.2). Указанный переход принадлежит серии Бальмера.

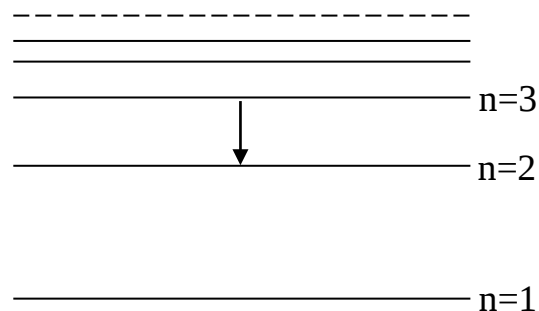


Рис. 6.2

Задача 3. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода 13,6 эВ. Исходя из принципа неопределенности, найти наименьшую неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме.

Решение

Как следует из принципа неопределенности,

$$\Delta x \geq \hbar / \Delta p_x. \quad (1)$$

Физически разумная неопределенность проекции импульса Δp_x не должна превышать значения самой проекции импульса, т.е. $\Delta p_x \leq p_x$. Импульс связан с кинетической энергией соотношением:

$$p_x = \sqrt{2mT}, \quad (2)$$

где T - кинетическая энергия электрона, m - его масса. Подставляем (2) в (1):

$$\Delta x \geq \hbar / p_x \geq \hbar / \sqrt{2mT}$$

и производим численный расчет:

$$\Delta x \geq 0,527 \cdot 10^{-10} \text{ м.}$$

Следовательно, наименьшая допустимая принципом неопределенности неточность $(\Delta x)_{\min}$, с которой можно определить координату электрона в атоме водорода, есть величина порядка 10^{-10} м ($0,5 \text{ \AA}$).

Задачи, рекомендуемые для решения в аудитории

1. Сколько спектральных линий N будет испускать атом водорода, который возбуждают до n -го энергетического состояния?

Ответ: $N = n(n-1)/2$.

2. Разница между головными линиями серий Лаймана и Бальмера в длинах волн в спектре атомарного водорода равна $\Delta\lambda = 534,7 \text{ нм}$. Определить по этим данным постоянную Планка h .

Ответ: $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}$.

3. Найти наибольшую длину волны $\lambda_{\max}$ в ультрафиолетовой серии атома водорода. Какую наименьшую скорость $v_{\min}$ должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

Ответ: $\lambda_{\max} = 121 \text{ нм}$, $v_{\min} = 1,9 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.

4. Найти квантовое число n , соответствующее возбужденному состоянию иона He^+ , если при переходе в основное состояние этот ион испустил последовательно два фотона с длинами волн $\lambda_1 = 108,5 \text{ нм}$ и $\lambda_2 = 30,4 \text{ нм}$.

Ответ: $n = 5$

5. Электрон с кинетической энергией $T = 15 \text{ эВ}$ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1 \text{ мкм}$. Оценить в процентах относительную неточность $\Delta v/v$, с которой может быть определена скорость электрона.

Ответ: $\Delta v/v = 0,01 \%$.

6. Наименьшая неточность, с которой можно найти координату в атоме водорода, порядка 10^{-10} м . Найти неопределенность средней кинетической энергии электрона в основном состоянии атома водорода.

Ответ: $3,8 \text{ эВ}$.

7. Определить относительное уширение спектральной линии $\Delta\omega/\omega$, если известно, что время жизни атома в возбужденном состоянии равно 10^{-8} с и длина волны излучаемого фотона 0,6 мкм.

Ответ: $\Delta\omega/\omega = 3 \cdot 10^{-8}$.

8. Параллельный пучок электронов, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ, падает на щель шириной $d = 4 \cdot 10^{-5}$ м. Определить ширину изображения щели d_1 на люминесцентном экране, находящемся на расстоянии $l = 0,5$ м от щели. Интенсивностью дифракционных максимумов первого и более высоких порядков можно пренебречь.

Ответ: $d_1 = 5 \cdot 10^{-5}$ м.

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить, как изменится орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода при переходе электрона из возбужденного состояния в основное с испусканием одного кванта с длиной волны 97,25 нм.

2. Переход электрона в атоме водорода с n -ой орбиты на m -ую ($m = 1$) сопровождается излучением фотона с длиной волны 102,6 нм. Найти радиус n -ой орбиты.

3. В спектре атомарного водорода интервал между первыми двумя линиями, принадлежащими серии Бальмера, составляет $\Delta\lambda = 1,71 \cdot 10^{-7}$ м. Определить постоянную Ридберга.

4. У какого водородоподобного иона разность длин волн между головными линиями серий Бальмера и Лаймана равна 59,3 нм?

5. Атом водорода освещается ультрафиолетовым излучением с длиной волны 100 нм. Определить, какие спектральные линии появятся в спектре атома водорода.

6. Какие спектральные линии появятся в видимой области спектра при возбуждении атомов водорода электронами с энергией 12,8 эВ?

7. Какие спектральные линии появятся в спектре атома водорода при возбуждении их электронами с энергией 13 эВ? Наблюдения ведутся в серии Бальмера.

8. Определить наименьшую энергию, необходимую для возбуждения полного спектра дважды ионизированного атома лития.

9. Определить наименьшую энергию электронов, которые возбудили бы полный спектр атомов водорода. Какую наименьшую скорость должны иметь эти электроны?

10. Определить скорость, которую приобретет покоящийся ион гелия в результате излучения фотона при переходе из первого возбужденного состояния в основное.

11. Энергия ионизации атома водорода $E_i = 13,6$ эВ. Исходя из этого, определить энергию ε (в электрон-вольтах) фотона, соответствующую второй линии серии Бальмера.

12. Основываясь на том, что первый потенциал возбуждения атома водорода $\varphi_1 = 10,2$ В, определить энергию ε (в электрон-вольтах) фотона, соответствующего первой линии серии Бальмера.

13. Исходя из того, что энергия ионизации атома водорода E_i равна 13,6 эВ, определить первый потенциал возбуждения этого атома.

14. С помощью Боровской модели определить энергию ионизации иона гелия. Вычислить также минимальную длину волны фотона, при которой происходит ионизация.

15. Найти длину волны де Бройля для электрона, движущегося по круговой орбите атома водорода, находящегося в основном состоянии.

16. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм?

17. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов 510 кВ. Определить длину волны де Бройля, учитывая релятивистские эффекты.

18. Сравнить длины волн де Бройля для электрона и протона, прошедших ускоряющую разность потенциалов 1000 В.

19. Найти дебройлевскую длину волны молекул водорода, соответствующую их наиболее вероятной скорости при комнатной температуре.

20. При каком значении кинетической энергии дебройлевская длина волны электрона равна его комптоновской длине волны?

21. Неопределенность скорости электронов, движущихся вдоль оси абсцисс, составляет $\Delta v = 10^2$ м/с. Какова при этом неопределенность координаты x , определяющей местоположение электрона?

22. Определить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $v = 1,5 \cdot 10^6$ м/с, если допустимая неточность в определении скорости составляет 10 % от ее величины.

23. Какова неопределенность скорости электрона в атоме водорода? Считать, что наибольшая ошибка в определении координаты электрона будет того же порядка, что и размер атома водорода ($d = 10^{-10}$ м).

24. Молекулы водорода участвуют в тепловом движении при температуре $T = 300$ К. Найти неопределенность координат Δx молекул.

25. Оценить кинетическую энергию нуклона в ядре, полагая радиус ядра $r = 10^{-12}$ см.

26. Оценить с помощью соотношения неопределенностей минимальную кинетическую энергию электрона, локализованного в области размером $l = 0,2$ нм.

27. Электрон с кинетической энергией $T = 4$ эВ локализован в области размером $l = 1$ мкм. Оценить с помощью принципа неопределенности относительную погрешность его скорости.

6.2. Элементы квантовой механики

Основные формулы и понятия

1. Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar} (E - U) \psi = 0,$$

где $\psi(x)$ - координатная (или амплитудная) часть волновой функции, E - полная энергия частицы массой m , $U(x)$ - потенциальная энергия взаимодействия частицы в силовом поле.

2. Вероятность нахождения частицы в интервале от x_1 до x_2

$$P = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx,$$

где $|\psi(x)|^2$ - плотность вероятности.

3. Условие нормировки волновой функции для одномерного случая:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

4. Собственная волновая функция частицы, находящейся в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме,

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где n - главное квантовое число ($n = 1, 2, 3, \dots$), l - ширина ямы, x - координата ($0 \leq x \leq l$).

5. Собственные значения полной энергии частицы массой m , находящейся на n -ом энергетическом уровне в бесконечно глубокой одномерной потенциальной яме шириной l ,

$$E_n = \pi^2 \hbar^2 n^2 / 2ml.$$

6. Коэффициенты отражения ρ и пропускания τ волн де Бройля через низкий ($U < E$) потенциальный барьер бесконечной ширины (рис.6.3):

$$\rho = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2, \quad \tau = 4k_1 k_2 / (k_1 + k_2)^2,$$

где k_1, k_2 - значения волнового числа в областях I и II ($k = 2\pi/\lambda$).

7. Прозрачность прямоугольного потенциального барьера конечной ширины (рис. 6.4)

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2l}{\hbar} \sqrt{2m(U - E)}\right),$$

где D_0 - безразмерная величина порядка единицы, l - ширина барьера, m - масса частицы, E - полная энергия частицы, U - потенциальная энергия.

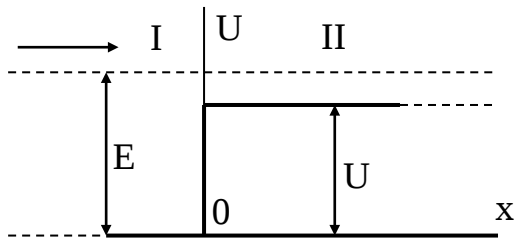


Рис. 6.3

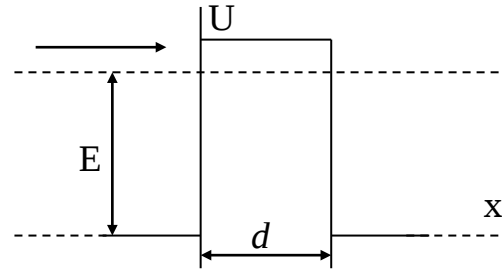


Рис. 6.4

8. Собственная волновая функция, отвечающая $1s$ - состоянию (основному) электрона в атоме водорода,

$$\psi(r) = e^{-r/r_1} / \sqrt{\pi r_1^3},$$

где r - расстояние электрона от ядра атома, r_1 - радиус первой Боровский орбиты.

9. Момент импульса L и магнитный момент p_m , обусловленные орбитальным движением электрона:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad p_m = \mu_\sigma \sqrt{l(l+1)},$$

где l - орбитальное квантовое число ($l = 1, 2, \dots, (n - 1)$), $\mu_\sigma = e\hbar/2m = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж·Т - магнетон Бора, $\hbar$ - постоянная Планка.

10. Проекция момента импульса L_z и проекция магнитного момента p_{mz} на направление внешнего магнитного поля:

$$L_z = m\hbar, \quad p_{mz} = m\mu_\sigma,$$

где m - магнитное квантовое число ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$).

11. Спиновые момент импульса L_s и магнитный момент p_{ms} электрона:

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)}, \quad p_{ms} = \mu_\sigma \sqrt{s(s+1)},$$

где $s = 1/2$.

12. Проекции спиновых механического и магнитного моментов электрона на направление внешнего магнитного поля

$$L_{sz} = m_s \hbar, \quad (p_{ms})_z = m_s \mu_\sigma,$$

где m_s - спиновое квантовое число, равное $\pm 1/2$.

Примеры решения задач

Задача 1. Электрон находится в одномерной бесконечно глубокой по потенциальной яме шириной l . Вычислить наименьшую разность двух соседних энергетических уровней (в электрон-вольтах) электрона в двух случаях: 1) $l = 10$ см; 2) $l = 10$ А.

Решение

Так как внутри потенциальной ямы (при $0 \leq x \leq l$) потенциальная энергия электрона $U = 0$, то его полная энергия есть кинетическая энергия T .

Согласно закону сохранения энергии, при движении электрона $T = \text{const}$. Следовательно, сохраняется и импульс электрона, равный:

$$p = \sqrt{2mT}.$$

Учитывая два возможных направления движения электрона вдоль оси X, запишем для проекций импульса на эту ось:

$$P_{x_1} = P, \quad P_{x_2} = -P$$

Согласно соотношению де Бройля, двум, отличающимся лишь знаком, проекциям импульса P_x соответствуют две плоские монохроматические волны де Бройля, распространяющиеся в противоположных направлениях вдоль оси X. В результате их интерференции возникнут стоячие волны де Бройля, характеризующиеся стационарным, т.е. не зависящим от времени, распределением вдоль оси X амплитуды колебаний. Эта амплитуда и есть волновая функция $\psi(x)$, квадрат которой определяет плотность вероятности пребывания электрона в точке с координатой X.

Так как потенциальная яма бесконечно глубокая ($U = \infty$ при $x < 0$ и $x > l$), электрон не может оказаться за ее пределами. Поэтому $\psi(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > l$. Отсюда в силу свойства непрерывности волновой функции, следует

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0.$$

Таким образом, амплитуда колебаний в стоячей волне де Бройля равна нулю в точках $x = 0, x = l$. Здесь находятся узлы стоячей волны. Поскольку расстояние между двумя соседними узлами равно половине длины волны, то в потенциальной яме могут быть лишь волны де Бройля, длина которых удовлетворяет условию

$$l = n\lambda_n/2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

т.е. на ширине ямы должно укладываться целое число полуволн.

Отсюда $\lambda = 2l/n$.

Из полученного результата можно сделать вывод, что в потенциальной яме существуют уровни энергии частицы. Действительно, полная энергия электрона в яме

$$E = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{P^2}{2m} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m\lambda^2}.$$

Подставив значения λ_n , получим

$$E_n = \pi^2\hbar^2 n^2 / 2ml^2.$$

Так как отношение уровней энергии $E_1:E_2:E_3\dots = 1:4:9\dots$, то наименьшая разность уровней

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 3\pi^2\hbar^2 / 2ml^2.$$

Производя вычисления, получим для двух случаев:

$$1) \Delta E_1 = 1,8 \cdot 10^{-35} \text{ Дж} = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ эВ};$$

$$2) \Delta E_2 = 1,8 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} = 1,1 \text{ эВ}.$$

Таким образом, в первом случае энергетический спектр электрона можно считать непрерывным, во втором - дискретным.

Задача 2. Частица в одномерной потенциальной яме шириной l находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Определить, в каких точках интервала ($0 < x < l$) плотность вероятности имеет максимальное и минимальное значения.

Решение

Плотность вероятности для $n = 2$ записывается следующим образом:

$$|\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{l} \sin^2(2\pi x/l).$$

Чтобы найти экстремальные точки данного выражения, продифференцируем его по координате x и приравняем к нулю:

$$\frac{2}{l} \cdot 2 \sin \frac{2\pi x}{l} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l} \cdot \frac{2\pi}{l} = 0;$$

$$\sin \frac{2\pi x}{l} \cdot \cos \frac{2\pi x}{l} = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{2\pi x}{l} - \frac{2\pi x}{l} \right) + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi x}{l} = 0;$$

$$\sin \frac{4\pi x}{l} = 0, \quad \frac{4\pi x}{l} = k\pi, \quad x = \frac{kl}{4}.$$

$k \neq 0$, так как $x = 0$ не удовлетворяет условию задачи,

$k \neq 4$, так как $x = l$ не удовлетворяет условию задачи,

$$k = 1, x_1 = \frac{l}{4}, \quad |\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{2\pi l}{4l} = \frac{2}{l} - \max,$$

$$k = 2, x_2 = \frac{l}{2}, \quad |\psi_2(x)|^2 = 0 \quad - \min,$$

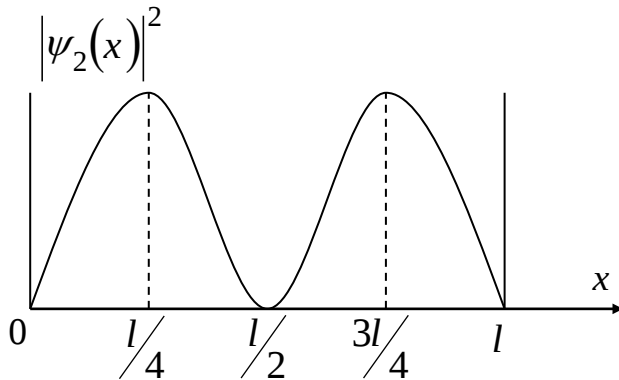


Рис. 6.5.

$$k = 3, x_3 = \frac{3l}{4},$$

$$|\psi_2(x)|^2 = \frac{2}{l} \sin^2 \frac{6\pi l}{4l} = \frac{2}{l} - \max.$$

График зависимости

$$|\psi_2(x)|^2 = f(x)$$

представлен на рис. 6.5

Задача 3. На пути электрона с дебройлевской длиной волны $\lambda = 1 \text{ \AA}$, движущегося в положительном направлении оси X (рис.6.6), находится потенциальный барьер величиной $U = 120 \text{ эВ}$. Написать уравнения Шредингера для I и II областей и решения этих уравнений. Определить длину волны де Бройля после прохождения барьера.

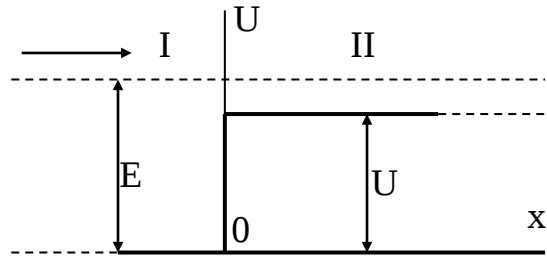


Рис. 6.6.

Решение

Для I области $U = 0$ уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (1)$$

Обозначим $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$, с другой стороны, волновое число $k_1 = 2\pi/\lambda_1$. Решение уравнения (1) ищем в виде $\psi = e^{\lambda x}$. Подстановка этой функции в (1) приводит к характеристическому уравнению:

$$\lambda^2 + k_1^2 = 0, \text{ откуда } \lambda_{1,2} = \pm i \cdot k_1.$$

Таким образом, решение уравнения (1) имеет вид

$$\psi_I = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x},$$

где $A_1 e^{ik_1 x}$ соответствует падающей волне, A_1 - амплитуда вероятности для падающей волны, $B_1 e^{-ik_1 x}$ соответствует отраженной волне, B_1 - амплитуда вероятности для отраженной волны.

Для области II уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0. \quad (2)$$

Обозначим

$$k_2 = \sqrt{2m(E - U)}/\hbar,$$

с другой стороны, волновое число $k_2 = 2\pi/\lambda_2$. Решение уравнения (2) ищем в виде $\psi = e^{\lambda x}$. Подстановка этой функции в (2) приводит к характеристическому уравнению:

$$\lambda^2 + k_2^2 = 0, \text{ откуда } \lambda_{1,2} = \pm i \cdot k_2.$$

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} = A_2 e^{ik_2 x},$$

так как отраженной волны в области II нет; A_2 - амплитуда вероятности волны, прошедшей через барьер в область II.

Из равенств

$$k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar = 2\pi/\lambda \quad \text{и} \quad k_2 = \sqrt{2m(E-U)}/\hbar = 2\pi/\lambda_2$$

для длин волн де Бройля имеем

$$\lambda_1 = 2\pi\hbar/\sqrt{2mE}, \quad \lambda_2 = 2\pi\hbar/\sqrt{2m(E-U)}.$$

Из последних выражений, исключив E , находим λ_2 :

$$\lambda_2 = \lambda_1 / \sqrt{1 - \frac{mU\lambda_1^2}{2\pi^2\hbar^2}}.$$

Произведя вычисления, получим

$$\lambda_2 = 2,18 \text{ \AA}.$$

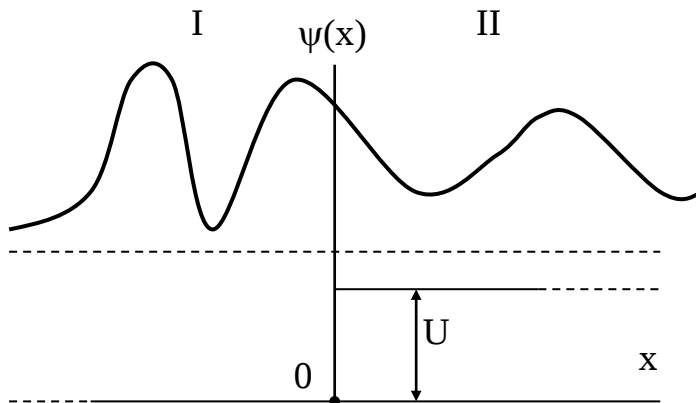


Рис. 6.7

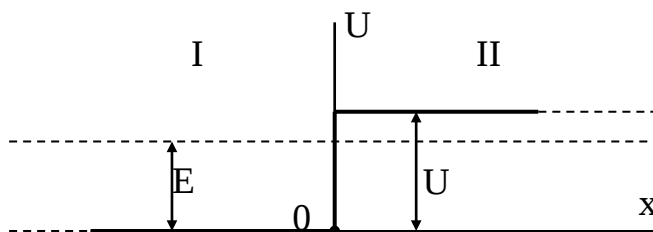


Рис. 6.8

Таким образом, при прохождении низкого потенциального барьера де-бройлевская длина волны электрона увеличивается (рис. 6.7).

Задача 4. Определить плотность вероятности

$|\psi_{II}(0)|^2$ нахождения электрона в области II высокого потенциального барьера (рис. 6.8) в точке $x = 0$, если энергия электрона E , высота потенциального барьера U , а волновая функция ψ нормирована так, что $A_I = 1$.

Решение

Для I области, где $U = 0$, уравнение Шредингера имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad (1)$$

Решение уравнения (1) (см. задачу № 3):

$$\psi_I = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x},$$

где $k_1 = \sqrt{2mE}/\hbar$, A_1 , B_1 - амплитуды вероятности падающей и отраженной волн.

Для области II, где $E < U$, уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (U - E) \psi = 0. \quad (2)$$

Обозначим $k_2 = \sqrt{2m(U - E)}/\hbar$ и ищем решение уравнения (2) в виде $\psi = e^{\lambda x}$. Подстановка этой функции в (2) приводит к характеристическому уравнению:

$$\lambda^2 - k_2^2 = 0, \text{ откуда } \lambda_{1,2} = \pm k_2.$$

Таким образом, решение уравнения (2) имеет вид

$$\psi_{II} = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x} = B_2 e^{ik_2 x},$$

т.к. первое слагаемое не удовлетворяет конечности волновой функции.

Если $x = 0$, то $|\psi_{II}(0)|^2 = B_2 \cdot B_2^*$. Для нахождения коэффициента B_2 пользуемся свойствами непрерывности волновой функции и непрерывности ее первой производной:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0); \quad A_1 + B_1 = B_2, \quad (3)$$

$$\psi'_I(0) = \psi'_{II}(0); \quad ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -k_2 B_2. \quad (4)$$

Из (3) и (4) находим

$$B_2 = 2ik_1 / (ik_1 - k_2)$$

Тогда плотность вероятности нахождения электрона в точке $x = 0$

$$|\psi_{II}(0)|^2 = \frac{4k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{4 \cdot 2mE}{\hbar^2 [2mE + 2m(U - E)]} = \frac{4E}{U}.$$

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1. В месте разрыва непрерывного потенциала происходит частичное отражение падающей волны и частичное проникновение в область за разрывом.

2. Вероятность обнаружения электрона за потенциальным барьером не равна нулю (туннельный эффект) (см. рис.6.9).

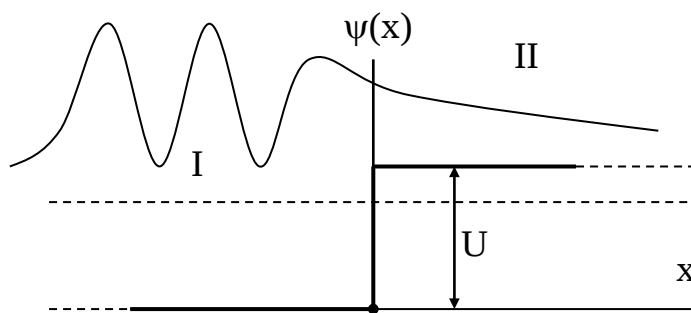


Рис. 6.9

Задача 5. Атом водорода находится в основном состоянии. Собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в атоме, имеет вид $\psi(r) = C e^{-r/r_1}$; где C - некоторая постоянная, r_1 - радиус первой Боровской орбиты. Найти из условия нормировки значение постоянной C .

Решение

Условие нормировки волновой функции имеет вид

$$\int_V |\psi(r)|^2 dV = 1,$$

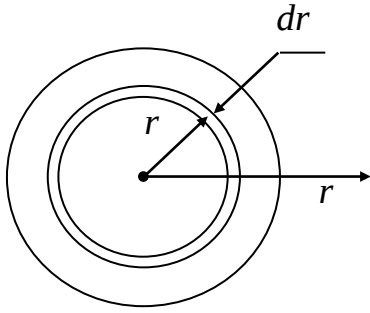


Рис. 6.10

где dV - элементарный объем, в пределах которого частица может быть обнаружена. Считаем, что электрон в атоме водорода находится в пределах некоторого шарового слоя толщиной dr , отстоящего от центра атома на расстоянии r (рис. 6.10). Тогда $dV = 4\pi r^2 dr$. Следовательно,

$$\int_0^{\infty} C^2 e^{-2r/r_1} 4\pi r^2 dr = 1.$$

Подобные интегралы легко считаются при следующих обозначениях: $r/r_1 = x$. Тогда $r = r_1 x$, $dr = r_1 dx$ и

$$4\pi r_1^3 C^2 \int_0^{\infty} e^{-2x} x^2 dx = 1.$$

Пользуясь методом разделения переменным, получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} x^2 dx = \frac{1}{4}.$$

Следовательно, для постоянной C окончательно получим

$$C = 1/\sqrt{\pi r_1^3}.$$

Задача 6. Атом водорода находится в основном состоянии. Определить наиболее вероятное расстояние r_e электрона от ядра.

Решение

Вероятность найти электрон в элементарном объеме dV равна $dP = |\psi(r)|^2 dV$. Волновая функция основного состояния зависит только от r и равна (см. предыдущую задачу):

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi r_1^3}} \cdot e^{-r/r_1},$$

где r_1 - первый Боровский радиус. В силу сферической симметрии задачи $dV = 4\pi r^2 dr$. Подставим $\psi(r)$ и dV в dP :

$$dP = \frac{4}{\pi r_1^3} e^{-2r/r_1} r^2 dr.$$

Введем линейную плотность вероятности $\omega(r) = dP/dr$:

$$\omega(r) = \frac{4}{\pi r_1^3} e^{-2r/r_1} r^2.$$

Функция $\omega(r)$ имеет максимум при некотором расстоянии $r = r_e$, которое и является наиболее вероятным. Для вычисления r_e исследуем функцию $\omega(r)$ на экстремум:

$$\frac{d\omega}{dr} = 2re^{-2r/r_1} - \frac{2r^2}{r_1}e^{-2r/r_1} = 0.$$

Отсюда $r_e = r_1$. Таким образом, наиболее вероятное расстояние электрона от ядра совпадает с радиусом первой Боровской орбиты.

Задача 7. Определить возможные значения орбитального момента импульса L электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения $\varepsilon = 12,09$ эВ.

Решение

Орбитальный момент импульса определяется по формуле

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}.$$

Для нахождения орбитального квантового числа l нужно знать значение главного квантового числа n . Энергия возбуждения ε - квант энергии, поглощенный атомом при переходе из основного состояния ($n = 1$) в возбужденное, т.е.

$$\varepsilon = E_n - E_1. \quad (1)$$

Но

$$E_n = -\frac{e^4 m}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

или

$$E_n = E_1 / n^2, \quad \text{где} \quad E_1 = -13,6 \text{ эВ},$$

Следовательно,

$$E_n = -13,6 / n^2. \quad (2)$$

Подставляем (2) в (1):

$$-13,6/n^2 + 13,6 = 12,09,$$

отсюда $n = 3$.

Если $n = 3$, то $l = 1, 2, 3$. Найдем возможные значения L :

$$l = 0: L = 0;$$

$$l = 1: L = \hbar \sqrt{2} = 1,49 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с};$$

$$l = 2: L = \hbar \sqrt{6} = 2,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

Задачи, рекомендуемые для решения в аудитории

1. Электрон находится в одномерной потенциальной яме шириной l . В каких точках интервала ($0 < x < l$) плотности вероятности нахождения электрона на первом и втором уровнях одинаковы? Вычислить значение плотности вероятности для этих точек. Решение пояснить графически.

Ответ: $x_1 = l/3$; $x_2 = 2l/3$; $|\psi(x)|^2 = 3/2l$.

2. Решение уравнения Шредингера для бесконечно глубокой одномерной потенциальной ямы можно записать в виде $\psi(x) = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}$, где $k = \sqrt{2mE}/\hbar$. Используя граничные условия и нормировку волновой функции, определить коэффициенты C_1 и C_2 , собственные значения энергии E_n и вид собственных волновых функций $\psi_n(x)$.

$$\text{Ответ: } C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{2l}}; \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2ml^2}; \quad \psi_n(x) = i \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi nx}{l}.$$

3. Пучок электронов с энергией $E = 25$ эВ встречает на своем пути барьер высотой $U = 26$ эВ. Определить относительную плотность вероятности η пребывания электрона в области II на расстоянии $x = 1 \text{ \AA}$ от границы областей.

$$\text{Ответ: } \eta = 0,36.$$

4. Частица с массой m и энергией E движется слева на потенциальный барьер высотой U . Найти: 1) коэффициент отражения ρ этого барьера, если $E > U$; 2) эффективную глубину $x_{\text{эфф}}$ проникновения частиц в область $x > 0$ при $E < U$. ($x_{\text{эфф}}$ - расстояние от границы барьера до точки, где плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в e раз).

$$\text{Ответ: } \rho = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2; \quad x_{\text{эфф}} = \sqrt{2m(U - E)} / 2\hbar.$$

5. Волновая Функция, описывающая состояние $2s$ - электрона в атоме водорода, имеет вид

$$\psi_{200}(\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (2 - \rho) e^{-\rho/2},$$

где ρ - расстояние от ядра, выраженное в атомных единицах ($\rho = r/r_1$, r_1 - радиус первой Боровской орбиты). Определить: 1) расстояния R от ядра, на которых вероятность обнаружить электрон максимальна; 2) расстояния R от ядра, на которых вероятность нахождения электрона равна нулю.

$$\text{Ответ: } 1) R_1 = 0,76 \text{ \AA}; \quad R_2 = 5,24 \text{ \AA}; \quad 2) R_1 = 0,2 \text{ \AA}; \quad R_2 = \infty.$$

6. Вычислить полную энергию E и орбитальный момент импульса L электрона, находящегося в $2p$ - состоянии в атоме водорода.

$$\text{Ответ: } E = -3,4 \text{ эВ}; \quad L = 1,5 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}.$$

7. Электрон в возбужденном атоме водорода находится в $3p$ - состоянии. Определить изменение магнитного момента Δp_m , обусловленного орбитальным движением электрона, при переходе атома в основное состояние.

$$\text{Ответ: } \Delta p_m = -1,31 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/Т}.$$

8. В атоме K , L , M - оболочки заполнены полностью. Определить: общее число N электронов в атоме; число s -, p - и d - электронов (N_s , N_p , N_d), число p - электронов, имеющих квантовое число $m = 0$ (N_{p_0}).

Ответ: $N = 28$; $N_s = 6$; $N_p = 12$; $N_d = 10$; $N_{p_0} = 4$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Нейтрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы $l = 10^{-9}$ м. Найти наименьшую разность двух соседних энергетических уровней нейтрона.

2. Протон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Определить ширину ямы, если наименьшая разность энергетических уровней протона равна 0,062 эВ.

3. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти ширину ямы, если разность энергий между уровнями с $n_1 = 2$ и $n_2 = 3$ составляет $\Delta E = 0,3$ эВ.

4. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы $l = 1 \text{ \AA}$. Какая энергия необходима, чтобы перевести электрон с третьего энергетического уровня на четвертый?

5. Какова ширина l одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона со второго квантового уровня на первый излучается энергия $E = 1$ эВ? Как изменится излучаемая энергия, если l увеличить в 10 раз?

6. Определить, при какой ширине l бесконечно глубокой потенциальной ямы дискретность энергии микрочастицы массы m становится сравнимой с энергией теплового движения при температуре T .

7. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы $l = 1$ см. Найти: а) плотность энергетических уровней dN/dE электрона, т.е. число уровней, приходящихся на единичный интервал энергии; б) значение этой плотности в окрестности уровня с номером $n = 10^{10}$.

8. Электрон находится в основном состоянии в прямоугольной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < l$). Вычислить вероятность нахождения электрона в области $\frac{l}{4} < x < \frac{l}{2}$.

9. Электрон находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < l$). Определить вероятность нахождения электрона в интервале шириной $\frac{l}{4}$, равноудаленном от стенок ямы.

10. Частица находится в основном состоянии в одномерной потенциальной прямоугольной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < l$). Найти вероятность пребывания частицы в областях:

а) $0 < x < l/3$, б) $l/3 < x < 2l/3$.

11. Частица находится в низшем возбужденном состоянии в одномерной потенциальной прямоугольной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < l$). Определить вероятность нахождения частицы в интервале шириной $l/4$, равноудаленной от стенок ямы.

12. Частица находится в возбужденном состоянии ($n = 3$) в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Ширина ямы - l . В каких точках интервала ($0 < x < l$) плотность вероятности нахождения частицы: а) максимальна; б) минимальна.

13. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < l$). Вычислить отношение вероятностей P_1 / P_2 нахождения частицы на первом и втором энергетических уровнях в интервале $l/4$, равноудаленном от стенок ямы.

14. Частица находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками ($0 < x < l$). Определить отношение вероятностей пребывания частицы в середине ямы и на расстоянии $l/4$ от края ямы. Вычисления произвести для следующих случаев: а) первый уровень энергии; б) третий уровень энергии.

15. Электрон с энергией $E = 100$ эВ попадает на потенциальный барьер высотой $U = 64$ эВ. Определить вероятность того, что электрон отразится от барьера.

16. Электрон обладает энергией $E = 10$ эВ. Определить, во сколько раз изменится его скорость v и длина волны де Бройля λ при прохождении через потенциальный барьер высотой $U = 6$ эВ.

17. В одномерном потенциальном поле, профиль которого указан (рис. 6.11), движется в положительном направлении электрон с кинетической энергией 1 кэВ. Найти, во сколько раз изменится дебройлевская длина волны электрона при переходе через скачок потенциала 100 В?

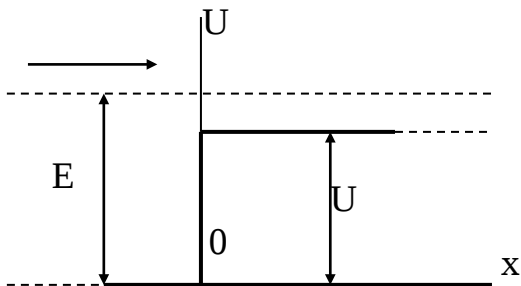


Рис. 6.11

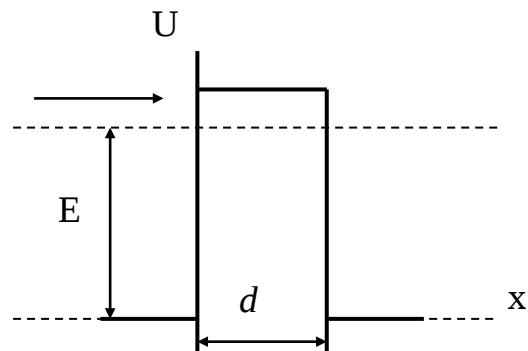


Рис. 6.12

18. Оценить вероятность P прохождения потенциального барьера α -частицей, если ширина барьера $d = 1 \text{ \AA}$ и высота $U = 8 \text{ МэВ}$. Энергия частицы составляет половину высоты барьера.

19. Протон с энергией $E = 1 \text{ МэВ}$ изменил при прохождении прямоугольного потенциального барьера дебройлевскую длину волны на 1% . Определить высоту U потенциального барьера.

20. Пучок электрона с энергией $E = 16 \text{ эВ}$ встречает на своем пути потенциальный барьер высотой $U = 4 \text{ эВ}$. Определить коэффициент пропускания и коэффициент отражения волн де Бройля для данного барьера.

21. Электрон с энергией $E = 9 \text{ эВ}$ движется в положительном направлении оси X (рис. 6.12). Оценить вероятность того, что электрон пройдет через потенциальный барьер, если его высота $U = 10 \text{ эВ}$, ширина $d = 0,1 \text{ нм}$.

22. При какой ширине d прямоугольного барьера коэффициент прозрачности для электронов равен $0,01$? Разность энергии $U - E = 10 \text{ эВ}$.

23. Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $d = 0,1 \text{ нм}$. При какой разности энергий $U - E$ вероятность прохождения протона через барьер равна $0,99$?

24. Протон и электрон прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов $\Delta\phi = 10 \text{ кВ}$. Во сколько раз отличаются коэффициенты прозрачности для них, если высота U барьера равна 20 кэВ и ширина $d = 0,1 \text{ пм}$?

25. Вычислить энергию и орбитальный момент импульса электрона, находящегося в $4p$ -состоянии в атоме водорода.

26. Момент импульса орбитального движения в атоме водорода равен $1,83 \cdot 10^{-32} \text{ Дж}\cdot\text{с}$. Определить магнитный момент, обусловленный орбитальным движением электрона.

27. Вычислите орбитальное квантовое число для электрона на первой Боровской орбите, скорость которого $U = 2,2 \cdot 10^6 \text{ м/с}$.

28. Чему равны энергия и момент импульса электрона в атоме водорода в $3p$ -состоянии?

29. Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии, поглотил квант света с энергией $\varepsilon = 10,2 \text{ эВ}$. Определить изменение момента импульса ΔL орбитального движения электрона. В возбужденном состоянии атома электрон в p -состоянии.

30. Сколько возможных проекций на направление внешнего магнитного поля может принять орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода, если орбитальное квантовое число, характеризующее состояние электрона, равно 3 ?

31. Чему равно значение спинового магнитного момента электрона в атоме водорода, если орбитальное квантовое число равно 2 ? Сколько разрешенных проекций может иметь p_{ms} на направление внешнего магнитного поля?

6.3. Физика атомного ядра

Основные формулы и понятия

1. Радиус ядра с массовым числом A (числом нуклонов в ядре)

$$R = 1,23 \cdot 10^{-15} \cdot A^{1/3} \text{ м.}$$

2. Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{св} = \Delta m \cdot c^2,$$

где c - скорость света в вакууме, Δm - дефект массы.

3. Удельная энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{уд} = E_{св} / A.$$

4. Дефект массы ядра

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{я},$$

где Z - зарядовое число (число протонов в ядре), A - массовое число, m_p , m_n и $m_{я}$ - массы протона, нейтрона и ядра соответственно.

5. Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где N - число нераспавшихся ядер радиоактивного элемента в момент времени t , N_0 - исходное (начальное) число ядер радиоактивного элемента, λ - постоянная распада.

6. Период полураспада

$$T = \ln 2 / \lambda.$$

7. Среднее время жизни (промежуток времени, за который число нераспавшихся ядер радиоактивного элемента уменьшилось в e раз):

$$\tau = 1 / \lambda.$$

8. Активность радиоактивного элемента (число ядер, распавшихся в единицу времени)

$$a = dN/dt = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Активность радиоактивного элемента изменяется со временем по закону

$$a = a_0 e^{-\lambda t},$$

где a_0 - первоначальная активность препарата.

9. Произведение постоянной распада данного элемента на число нераспавшихся ядер этого элемента в смеси ряда образующихся один из другого радиоактивных элементов одинаково для всех составляющих смеси, т.е.

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_n N_n.$$

Если радиоактивный элемент A с постоянной распада λ_A помещен в закрытый сосуд, и при распаде этого элемента образуется также радиоактивный элемент B с постоянной распада λ_B , то число атомов элемента B к моменту времени t будет:

$$N_B = N_A \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} (e^{-\lambda_A t} - e^{-\lambda_B t}),$$

где N_A - число атомов элемента A в начальный момент времени.

Примеры решения задач

Задача 1. Сколько атомов полония распадётся за сутки из 1 миллиона атомов?

Решение

Число распавшихся за время t ядер N_p определяется формулой

$$N_p = N_0 - N = N_0(1 - e^{-\lambda t}),$$

где N_0 - первоначальное число ядер, N - число распавшихся в момент t ядер, λ - постоянная распада. Перейдем от постоянной распада λ к периоду полураспада T , поскольку обычно задаются данные для T :

$$N_p = N_0(1 - e^{-t \ln 2 / T}).$$

Подставляя численные значения, получим

$$N_p = 5030 \text{ атомов.}$$

Задача 2. Определить период полураспада T радиоактивного полония ^{210}Po , если 1 г этого изотопа образует в год $89,5 \text{ см}^3$ гелия при нормальных условиях.

Решение

Массу полученного гелия $m_{\text{гс}}$ можно определить из уравнения Менделеева-Клапейрона:

$$m_{\text{гс}} = \frac{pV\mu}{RT} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг.}$$

Масса полония, следовательно, уменьшилась на $m_{\text{гс}} = 0,015 \text{ г}$. Число атомов, содержащихся в образце нуклида (полония) определяется формулой

$$N = N_A \cdot m_{p_0} / A, \quad (1)$$

где m_{p_0} - масса образца, A - массовое число, N_A - число Авогадро. С другой стороны, число атомов N уменьшается согласно закону радиоактивного распада:

$$N = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-t \ln 2 / T}. \quad (2)$$

Исходя из формул (1) и (2), можно записать

$$N_0 = N_A \cdot m_{p_0} / A; \quad N = N_A (m_{p_0} - m_{nc}) / A;$$

$$m_{p_0} - m_{nc} = m_{p_0}^{-t \ln 2 / T}.$$

Тогда для периода полураспада радиоактивного полония имеем

$$T = \frac{t \ln 2}{\ln [m_{p_0} / (m_{p_0} - m_{nc})]}.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$T = 138 \text{ суток.}$$

Задача 3. Найти активность радона, образовавшегося из $m_0 = 1 \text{ г}$ радия $^{226}_{88}\text{Ra}$ за одни сутки. Найти также максимальную активность радона. Периоды полураспада радия и радона соответственно равны $T_1 = 1,6 \cdot 10^3$ лет, $T_2 = 3,8$ суток.

Решение

Активность радона можно найти по формуле

$$a_2 = \lambda_2 N_2, \quad (1)$$

где λ_2 - постоянная радиоактивного распада изотопа радона, N_2 - число ядер изотопа радона, которое изменяется со временем по закону

$$N_2 = N_1(O) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}),$$

где $N_1(O)$ - число ядер изотопа радия в момент времени $t = 0$, λ_1 - постоянная радиоактивного распада изотопа радия. Учитывая, что

$$\lambda = \ln 2 / T \text{ и } N_1 = N_A m_0 / A,$$

где T - период полураспада, N_A - число Авогадро, m_0 - начальная масса изотопа радия, A - массовое число, формулу (1) можно записать следующим образом:

$$a_2 = \frac{N_A m_0}{A} \cdot \frac{\ln 2}{T_1 - T_2} \left[e^{-(\ln 2)t/T_1} - e^{-(\ln 2)t/T_2} \right]. \quad (2)$$

Так как $T_1 \gg T_2$ и $T_1 \gg t$, формула (2) примет более простой вид:

$$a_2 = \frac{N_A m_0}{A} \cdot \frac{\ln 2}{T_1} \left[1 - e^{-(\ln 2)t/T_2} \right]. \quad (3)$$

Произведя вычисления, получим

$$a_2 = 0,17 \text{ Ки}$$

Максимальную активность радона можно найти из формулы (3), анализируя которую, можно заметить, что с ростом времени t величина, стоящая в скобках, приближается по экспоненте к единице.

Следовательно,

$$(a_2)_{\max} = \frac{N_A m_0}{A} \cdot \frac{\ln 2}{T_1} = 3,7 \cdot 10^{17} \text{ расп/с} = 1 \text{ Ки}.$$

Задача 4. Найти энергию связи нуклонов ΔE в ядре изотопа лития.

Решение

Энергия связи ядра любого изотопа определяется соотношением

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2, \quad (1)$$

где c - скорость света в вакууме, Δm - дефект массы ядра, который равен:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}. \quad (2)$$

Так как $m_{\text{я}} = m_a - Zm_e$, где m_a - масса атома и m_e - масса электрона, то уравнение (2) можно заменить следующим:

$$\Delta m = Zm_H + (A - Z)m_n - m_a,$$

где m_H - масса изотопа водорода. Если массы частиц измерять в атомных единицах массы ($1 \text{ а.е.м.} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$), а энергию - в мегаэлектрон-вольтах, то уравнение (1) можно записать в виде

$$\Delta E \cong 931 \Delta m = 931(Z \cdot m_H + (A - Z)m_n - m_a).$$

Произведем численный расчет:

$$\Delta E = 39,3 \text{ МэВ}.$$

Задача 5. Найти электрическую мощность атомной электростанции, расходующей в сутки 0,1 кг урана-235, если к.п.д. η электростанции 16 %, а энергия, выделяющаяся при распаде одного ядра урана $\Delta E_1 = 200 \text{ МэВ}$.

Решение

К.п.д. любой электростанции равен отношению полезной мощности P_n к затраченной мощности P_z , которая определяется количеством теплоты Q , выделяющейся при распаде урана в единицу времени:

$$\eta = \frac{P_n}{P_3} \cdot 100\%.$$

Отсюда для P_n имеем

$$P_n = \eta P_3 = \eta \cdot Q/t.$$

Энергия, выделяющаяся при распаде урана, определяется количеством распавшихся ядер:

$$Q = \Delta E_1 \cdot N,$$

связанных с расходуемой массой урана соотношением

$$N = N_A \cdot m/A.$$

Следовательно, для электрической мощности электростанции получаем

$$P_n = \frac{\eta \Delta E_1 m N_A}{At}.$$

Произведем численный расчет:

$$P_n = 1,5 \cdot 10^7 \text{ Вт}.$$

Задачи, рекомендуемые для решения в аудитории

1. Определить удельную энергию связи $\Delta E_{y\partial}$ ядер ${}^3_7\text{Li}$ и ${}^{113}_{48}\text{Cd}$.

Ответ: $\Delta E_{y\partial} = 5,6 \text{ МэВ}$ и $\Delta E_{y\partial} = 8,5 \text{ МэВ}$.

2. Сколько α и β частиц выбрасывается при превращении ядра ${}^{237}_{92}\text{U}$ в ядро висмута ${}^{205}_{83}\text{Bi}$?

Ответ: 8 α - частиц и 7 β - частиц.

3. За какое время распадется 25 % начального количества (10 г) ядер радиоактивного нуклида, если период его полураспада равен 24 часам?

4. Найти активность a 1 кг полония ${}^{210}_{84}\text{Po}$.

Ответ: $a = 1,67 \cdot 10^8 \text{ расп/с}$.

5. Через какое время t активность изотопа стронция-90 уменьшится в 10 раз?

Ответ: $t = 93 \text{ года}$.

6. Какое количество m воды можно нагреть от 0°C до кипения, если использовать всё тепло, выделяющееся в реакции при полном разложении 1 г лития?

Ответ: $m = 5,7 \cdot 10^5$ кг.

7. Какое количество энергии ΔE выделится, если разделятся все ядра урана, содержащиеся в 1 г?

Ответ: $\Delta E = 82 \text{ ГДж}$.

8. Определить суточный расход ядерного горючего урана-235 в ядерном реакторе атомной электростанции. Тепловая мощность станции 10^7 Вт, к.п.д. станции 20 %. Принять энергию, выделяющуюся при одном акте деления ядра, равной 200 МэВ.

Ответ: 53 г.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какая часть начального количества атомов распадется за один год в радиоактивном изотопе ^{229}Th ?

2. За один год начальное количество радиоактивного изотопа уменьшилось в 3 раза. Во сколько раз оно уменьшится за 2 года?

3. Некоторый радиоактивный изотоп имеет постоянную распада $\lambda = 1,44 \cdot 10^{-3} \text{ час}^{-1}$. Через сколько времени распадется 75 % первоначального количества ядер?

4. За какое время произойдет распад полония $^{210}_{84}\text{Po}$ массой 2 мг, если в начальный момент времени его масса 0,2 г?

5. Определить число атомов урана, распавшихся в течение года, если первоначальная масса равна 1 кг. Вычислить постоянную распада урана.

6. Препарат ^{238}U массой 1 г излучает $1,24 \cdot 10^4$ α -частиц в секунду. Найти период полураспада этого изотопа и активность препарата.

7. Активность некоторого препарата уменьшается в 2,5 раза за 7 суток. Найти его период полураспада.

8. Найти постоянную распада и среднее время жизни радиоактивного изотопа ^{55}Co , если известно, что его активность уменьшается на 4 % за час. Продукт распада нерадиоактивен.

9. Изотоп фосфора $^{32}_{15}\text{P}$ дает 10^4 α -распадов в секунду. Период полураспада 14,3 суток. Найти массу препарата и активность через месяц.

10. В нормальных условиях 1 г радия образует $0,043 \text{ см}^3$ гелия в год. Определить период полураспада радия.

11. Определить количество радия, содержащегося в тонне равновесной урановой руды с 6 % концентрацией урана. При равновесии на 1 г урана приходится $3,4 \cdot 10^{-7}$ г радия.

12. При распаде радиоактивного полония в течение 1 часа образовался гелий, который при нормальных условиях занял объем $V = 89,5$ см³. Определить период полураспада полония.

13. Определить энергию связи ядер ${}^4_2\text{He}$ массой 1 г.

14. Вычислить энергию связи ядер ${}^3_1\text{H}$ и ${}^3_2\text{He}$. Какое из этих ядер более устойчиво?

15. Какую наименьшую энергию связи нужно затратить, чтобы разделить ядро гелия на две одинаковые части?

16. Какую минимальную энергию необходимо затратить для разделения ядра ${}^{12}_6\text{C}$ на три равные части?

17. Определить энергию, освобождаемую в водородной бомбе при синтезе 1 кг гелия.

18. Сколько тепла выделится при образовании 1г гелия в результате ядерной реакции?

19. Реактор мощностью 100 МВт производит плутоний ${}^{239}_{94}\text{Pu}$. Исходя из того, что в среднем при одном акте деления ядра урана-235 возникает 1,5 ядра плутония, найти, сколько при этом плутония образуется в течение 10 дней?

20. Найти энергию, выделяющуюся при делении урана-235, если масса урана 1 кг и при каждом акте деления выделяется 200 МэВ.

21. Какое количество урана-235 расходуется в сутки на атомной электростанции мощностью 5000 кВт? К.п.д. станции 17 %. Считать, что при каждом акте распада выделяется энергия 200 МэВ.

22. Мощность уранового реактора 1 МВт. Сколько урана потребляет он за один час, если при делении каждого ядра урана выделяется энергия 200 МэВ?

23. При сгорании ядерного топлива на атомной электростанции за сутки выделяется приблизительно 28,5 МДж энергии. Сколько ядерного горючего расходует станция за сутки, если принять, что при расщеплении каждого ядра урана-235 выделяется 200 МэВ энергии?

24. Мощность атомных установок подводной лодки "Наутилус" равна 14,7 МВт. Ядерным топливом служит обогащенный уран-235. Определить запас топлива, необходимого для месячного плавания лодки, если при делении одного ядра урана выделяется 200 МэВ энергии.

25. За сутки активность нуклида уменьшилась от 3,2 Кюри до 0,2 Кюри. Определить период полураспада T этого нуклида.

26. Чему равна активность a радона, образовавшегося из 1 г радия за 1 час?

Варианты индивидуального задания

№ варианта	Тема 1	Тема 2	Тема 3
1	1,15,21	3,13,29	1,13,19
2	2,16,20	1,126,31	2,14,20
3	3,23,17	2,12a,30	3,21,15
4	4,24,18	6,11,26	4,22,16
5	19,5,25	5,146,27	17,5,23
6	22,6,26	4,14a,28	18,6,24
7	27,7,15	1,8,25	21,7,13
8	21,8,16	7,106,25	22,8,14
9	17,22,9	2,9,26	15,23,9
10	18,23,10	1,24,28	16,24,10
11	21,19,11	3,10a,27	19,17,11
12	25,20,12	2,15,27	20,18,12
13	13,26,17	4,106,29	25,23,13
14	14,27,18	1,13,26	26,23,14
15	2,15,24	5,21,30	1,15,22
16	1,16,22	3,16,26	2,16,21
17	24,3,19	2,146,28	17,3,20
18	23,4,20	6,22,31	18,4,19
19	17,5,26	7,23,28	20,5,13
20	18,6,25	4,17,25	21,6,14
21	23,19,7	5,18,31	15,22,7
22	27,22,8	6,10a,30	16,22,8
23	15,20,9	7,12a,29	24,17,9
24	16,21,10	3,16,30	22,18,10
25	18,24,11	4,22,27	11,13,23

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие адресовано студентам технических вузов, изучающих дисциплину «Физика» на минимальном уровне трудоемкости 8 - 10 зачетных единиц (~300 академических часов). На этом уровне рассматриваются только модельные представления, описывающие достаточно ограниченный круг экспериментальных ситуаций. Глубина изучения дисциплины этого уровня предполагает способность воспроизводить типовые ситуации, использовать их в решении простейших задач. Что и определяет представленную информацию в основной части пособия, где нет решения сложных задач, требующих знания глубокого знания всей дисциплины, но основные разделы физики обозначены и раскрыты примерами.

Практические занятия по решению задач – один из обязательных видов учебной работы при изучении курса физики. Без них невозможно полноценное изучение физики, которая по образному выражению академика Л. А. Арцимовича есть «фундамент новой техники, мастерская смелых технических идей, опора обороны и движущая сила непрерывного индустриального прогресса». Только самостоятельно решая задачи, можно перевести знания с уровня воспроизведения на уровень творчества. Отсутствие умения решать задачи очень часто приводит к тому, что даже самые совершенные знания не находят применения, забываются и исчезают.

Физика создает универсальную базу для изучения общепрофессиональных и специальных дисциплин, закладывает фундамент последующего обучения в магистратуре, аспирантуре. Она даёт цельное представление о физических законах окружающего мира в их единстве и взаимосвязи, вооружает бакалавров необходимыми знаниями для решения научно-технических задач в теоретических и прикладных аспектах.

Тем, кто готов применить приведенные рекомендации на практике, желаем успеха.

Библиографический список использованной и рекомендованной для подготовки литературы

1. Беликов, Б.С. Решение задач по физике. Общие методы [Текст]: учебное пособие для студентов вузов / Б.С. Беликов. – М.: Высш. шк., 2011. – 256с.
2. Волькенштейн, В. С. Сборник задач по общему курсу физики [Текст] : учеб. пособие для студентов технических вузов / В. С. Волькенштейн. - 3-е изд. испр. и доп. - СПб.: Книжный мир, 2010 . – 327 с.: ил.
3. Детлаф, А. А. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для втузов / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. - 4-е изд., испр. – М.: Высшая школа, 2012. – 717 с.: ил.
4. Зисман, Г.А. Курс общей физики [Текст]: учебное пособие для вузов. Т.1: Механика. Молекулярная физика. Колебания и волны / Г.А. Зисман, О.М. Тодес.– Киев: Дніпро, 1994. – 339с.
5. Иродов, Н.Е. Задачи по общей физике [Текст]: учебное пособие / Н.Е. Иродов. – М.: Наука, 2012 – 431с.
6. Кабардин, О.Ф. Физика. Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы [Текст] / О.Ф. Кабардин. – М.: Аст-Пресс , 2011 –527с.
7. Казаков, Р.Х. Ньютоновская механика [Текст]: учебное пособие для вузов / Р.Х. Казаков. – М.: Высш. шк., 2004. – 232с.
8. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для вузов по техническим специальностям и направлениям. В 2 т. Т. 1 / В. В. Арсентьев [и др.]; под ред. В. Н. Лозовского. - 6-е изд., испр. и доп. - СПб. : Лань, 2011. – 572с.
9. Половникова, Л.Б. Методическая система преемственности курса физики технического вуза (на примере вводного раздела «Механика») [Текст]: дис. ... канд. пед. наук/ Л.Б. Половникова. – Тюмень, 2009. – 190с.
10. Половникова, Л.Б. Практикум по решению физических задач [Текст]: учебное пособие/ Л.Б. Половникова. – Тюмень: ТюмГНГУ, 2013 – 132с.
11. Пономарев, Ю.И. Физика [Текст]: Механика. Законы сохранения. Темы школьного курса / Ю.И. Пономарев, М.Н. Перунова, В.А. Орлов – М.: Дрофа. 2010. – 96с.
12. Русаков, А.В.Сборник задач по физике. Механика [Текст] / А.В. Русаков, Сухов В.Г. – Сергиев Посад, 2012. – 211с.
13. Савельев, И. В. Курс общей физики [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов по техническим (550000) и технологическим (650000) направлениям. В 3 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика / И. В. Савельев. - 10-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2008. – 432 с.: ил.

14. Сайт НИИ мониторинга качества образования [Электронный ресурс].– Режим доступа: <http://i-exam.ru/> свободный. – Загл. с экрана.
15. Селезнев, Ю.А. Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и для самообразования [Текст] / Ю.А. Селезнев, – М.: Наука, 1989. – 576с.
16. Справочник по физике: формулы, таблицы, схемы. Мир физики и техники [Текст] / К. Нартнак [и др.] – М.: Техносфера, 2009. – 205с.
17. Трофимова, Т. И. Курс физики [Текст]: учеб. пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Т. И. Трофимова. - 17-е изд., стер. - М.: Academia, 2012. – 557с.: ил. - (Высшее профессиональное образование).
18. Трофимова, Т. И. Курс физики. Задачи и решения [Текст] : учеб. пособие для студентов втузов / Т. И. Трофимова, А. В. Фирсов. - М.: Academia, 2012. – 590 с.: ил. - (Высшее профессиональное образование).
19. Трофимова, Т. И. Сборник задач по курсу физики [Текст]: учеб. пособие для вузов / Т.И. Трофимова – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2012. – 542с.
20. Чертов, А. Г. Задачник по физике [Текст] : учеб. пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. - 8-е изд., перераб. и доп. - М. : Физматлит, 2006. - 640 с. : ил. Айзензон, А.Е. Курс физики: учебное пособие для вузов / А.Е. Айзензон. –2-е изд. – М.: Высш. шк., 2010. –374с.
21. Яворский, Б.М. Физика. Для школьников старших классов и поступающих в вузы [Текст] / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М.: Дрофа, 2005. – 800с.

Учебное издание

**ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЙ
ПО КУРСУ ФИЗИКИ**

Составитель:
Половникова Людмила Борисовна

В авторской редакции

Подписано в печать 27.11.2015. Формат 60х90 1/16. Печ. л. 14,43.
Тираж 65 экз. Заказ № 334

Библиотечно-издательский комплекс
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Тюменский государственный нефтегазовый университет»
625000, г. Тюмень, ул. Володарского, 38

Типография библиотечно-издательского комплекса
625039, г. Тюмень, ул. Киевская, 52